

培育自由想像的投影幾何課程

黃正志

國立東華大學教育與潛能開發學系教育碩士在職專班研究生

縣立慈心華德福高中數學專任教師

李崗

國立東華大學教育與潛能開發學系教授

中文摘要

在 108 課綱的理念及數學領綱的目標中，並未提及自由想像，本文確認「自由想像」的數學素養在高中階段的重要性，並肯定以「投影幾何課程」來培育的價值。以史代納的教育美學為理論基礎，整理歸納出「以自由感知為基礎，經驗世界存有的美，以自由想像擴展視野，進而自由思考般的深入探索，輔以邏輯推理小心求證，做出自由的判斷」。分析投影幾何中從整體看部分的思路，引進無限遠點，將所有的關係一般化，讓圖形的形變過程「連續」起來，創造出整體圖像；介紹對偶關係，看見轉換立基點，又能符合邏輯推理的全新幾何風貌。

投影幾何課程的目的是透過精準繪圖，覺察自身感受，並運用邏輯推理得出無限及對偶的概念，訓練自由想像的能力，讓視野更開闊，豐富更多可能性，以自由感知與自由思考面對問題，用更有創意的全新方法來解決問題；並能懂得換位思考，透過自己的思辨，用不同的角度看事情，以多元觀點看待各領域的內涵。重視學生聽見內在真實聲音、自由判斷、批判性思考及美感教育四個部份，在培養學生邏輯推理的過程中，同時重視自由想像的重要性，產生驚奇的美感經驗。

關鍵詞：教育美學、投影幾何、華德福教育

Cultivating Free Imagination through Projective Geometry Course

Huang, Cheng-Chih

National Dong Hwa University Department of Education and Human Potentials Development Master
of Education Graduate Student

Ci-Xin Waldorf High School Full-time Mathematics Teacher

Lee, Kang

National Dong Hwa University Department of Education and Human Potentials Development
Professor

Abstract

In the 108 Curriculum Guidelines and the purpose of the Mathematics Curriculum, free imagination is not mentioned. This article confirms the importance of the mathematical literacy of "free imagination" at the high school level and affirms the value of cultivating it through a "projective geometry course." Based on Steiner's educational aesthetics, the study proposes "founded on free perception, experiencing the beauty of the world, expanding horizons through free imagination, and further exploring through free thinking, supplemented by careful verification through logical reasoning, making free judgments. It analyzes the approach of viewing parts from the whole in projective geometry, introducing the concept of infinity points to generalize all relationships, making the process of shape transformation "continuous," thereby creating an overall image. It also introduces the concept of dual relationships, showing how changing the foundational perspective can reveal a new geometric outlook that aligns with logical reasoning.

The purpose of the projective geometry course is to cultivate the ability of free imagination through precise drawing, awareness of one's own perceptions, and logical reasoning to derive the concepts of infinity and duality. This training broadens perspectives and enriches possibilities, enabling students to face problems with free perception and free thinking, solving issues creatively and innovatively. It also teaches them to understand and practice empathy, looking at things from different angles and considering diverse perspectives across various fields. Emphasizing four aspects—hearing one's inner true voice, free judgment, critical thinking, and aesthetic education—this approach values the importance of free imagination in the process of developing students' logical reasoning. It aims to create an astonishing experience of beauty through the integration of logical reasoning and free imagination.

Keywords : Educational Aesthetics, Projective Geometry, Waldorf Education

壹、前言

臺灣在民國 57 年將義務教育從六年延長為九年，此時的中小學數學課綱有「注重公設系統與邏輯推理的形式」、「對於名詞的界定與符號的使用甚為嚴謹」等特色。因為過於將數學抽象化，所以在 61 年即提出修訂版（陳玟樺，2019，頁 76-78），轉而注重知識的傳遞、數學技能的養成、熟練計算來達到有效率的解題，雖然已開始強調數學的特質，但以應用為主，是一種試圖訓練學生成為科學家、數學家的菁英教育模式。民國 74 年的課程標準注重學生自身在日常生活中會需要用到的知識和技能，以實用為主要方向。接下來的階段，教育主張以學生為主體，依據學生的自身經驗堆疊建構出更深一層的知識，強調學生帶得走的基本能力，並且開放課程，接受多元觀點（鄭章華等六人，2018，頁 34-36）。民國 93 年全面實施的九年一貫課程，數學領域已經相對跳脫原有的窠臼，朝美感、欣賞的方向前進，不再只是強調能力的養成，其中也提到「人類是先由應用、操作、實踐中，認識各種幾何要素與性質，彼此之間並沒有一定的先後關係。歐氏幾何的價值，首先是對這些先民知識的歸類與整理，其次才是作為知識典範的演繹系統」（教育部，2001，頁 73）。

而高中 99 課綱的數學目標，強調數學清晰性，能用簡單的模式駕馭繁雜的事物，著重在整體的歸納思維，突顯數學的普遍與本質，主要目標是放在銜接大學課程的內容。因此在高中階段盡力給予基礎的數學能力，對於數學的美感與欣賞也就無法再兼顧了（袁媛等四位，2015，頁 5-6）。現行的 108 課綱強調素養，有五個基本理念：(1)數學是一種語言，宜由自然語言的題材導入學習。(2)數學是一種實用的規律科學，教學宜重視跨領域的統整。(3)數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感。(4)數學應提供每位學生有感的學習機會。(5)數學教學應培養學生正確使用工具的素養（教育部，2018，頁 1-2）。

五項基本理念的前四項不容易在考試導向的教學方式下完成，但課綱願意放進這樣崇高的理念與目標著實令人雀躍，畢竟多年的教育體制，總是忽略了數學的美感，比較少培養學生欣賞數學之美的能力。若能在訓練學生運用數學方法思考、分析、解決問題；具備生活應用與相關學科的數學知識的同時，培養出學生能欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹的特質（教育部，2018，頁 3）。人類在有震撼人心的新發現之前，數學總是已經提出各式各樣的假說，想像出一個天馬行空、可能充滿不合邏輯、令人疑惑的世界；再一步步地尋找靈感，開放每一個進入腦中的念頭，驗證所有的關係、比較所有的特性，得出一個可供世人檢視的嚴謹論證。數學特別吸引人之處在於，這樣還不夠，這些關係是可以累進的，同一個關係可以讓後人不斷的添加其豐富度，只要過程不背離邏輯演繹，我們能用數學的語言創造出更簡潔的美，修正出最純淨的美。數學要的不僅僅是嚴謹的邏輯證明；它更渴望以最簡潔、最純淨的美來表達。好比美術、音樂等藝術，我

們不能要求大家成為藝術家，卻可以提高孩子們的素質，學會欣賞。如果美術是視覺的藝術、音樂是聽覺的藝術，那數學就是思考的藝術了。

整體教育除了在不同時期有著課綱目標的演變，過程中也開始接受不同教育理念的發展，並於 103 年 11 月公布「高級中等以下教育階段非學校型態實驗教育實施條例」、「學校型態實驗教育實施條例」、以及「公立國民小學及國民中學委託私人辦理條例」，也就是俗稱的實驗教育三法。開啟了教育上的多元觀點，以下僅就華德福教育的理念稍作闡述。

華德福教育依據著人的發展脈絡來設計課程，也就是課程的面向與進程將呼應著幼兒直至十二年級（高三）青年一路以來在意志、情感、思考三方面的發展，同時也依循著人類長久以來的發展史，因而在課程的規劃上，每個領域的歷史脈絡如何呈現也會是重點方向。九～十二年級的學生來到了發展「思考」的重要時機，華德福學校創辦人史代納博士曾說：「思考滲入每件事物與萬物合而為一」。舉例而言，十一年級的學習會是以「分析」為最主要的重點，同時強調自我思辨後的判斷，所以在數學中介紹投影幾何及微分，因為前者涉及無限遠處的思辨，而後者則是必須趨向無限小，兩者都需要透過內在的想像用理性的思維探索無限發生的事。投影幾何還提到「對偶」，此性質顯示出一個重要性，一個由點為基本單位開始建構出線、平面、空間的模式。同樣可以調整思考脈絡，重新以一個整體觀的空間存在，線由平面相交而形成，點則是兩線相交而得到，為此時的高中生給出不同視角看待事情的可能性。投影幾何在歐氏幾何的基礎架構下，為平行線交點存在於無限遠的可能性提出新的想法，重新為過往所學帶進積極主動的思考，嘗試給出重要且深具突破性的觀點，這是華德福教育有別於現行遵照 108 課綱體制在數學教育上的不同課程內容。是為十一年級學生發展思考的重要契機，在這過程中，學生會經歷由外在感官的經驗撞擊內在的思考，甚至是只能利用腦中的想像，運用理性做邏輯推理，畢竟無限遠是一個不可能到達的地方，在原有認知被劇烈衝撞、懷疑及拉扯之後，形成新的觀點或保持開放，當然也可能繼續懷疑這種觀點的正確性。將智能重新再次精雕細琢，培養學生對生命中純理性面的覺察（李心儀、劉雲英、謝叔樺合譯，2004，頁 260-261）。這也是 108 課綱以素養為導向的教學中，期待引導學生在數學領域中創告出品嘗美感的契機，或者也可以說是藉由思考產生的美感經驗。

數學需要思考，如何不經由考試為導向來啟動學生內在積極主動的意願來思考，是數學教育中很重要的一環。一種經由自己思考過後、內化成為自己的信念，並且以此為依據，而不是僅僅以習得的外在知識為依據的思考行為，能夠使人的內心更獨立，更確認判斷時背後的立論基礎。數學教育的任務就是以此為依據。華德福學校的教學計畫也是建立在這之上。（鄧麗君、廖玉儀合譯，2007，頁 82）

貳、投影幾何課程的理論基礎：史代納的教育美學

史代納的華德福教育強調藝術性，不僅是學習者要注入藝術涵養，教師本身也要做藝術鍛鍊，豐富自己的身心靈以便能夠引領學生朝正確的方向發展。以崇敬的心認識學生的靈性；帶著熱情接觸現在遇見的學生；小心翼翼的保護著學生原本的樣貌（孫愛萍譯，2016，頁 40）。不論在有形或無形中處處具備美感，美就像空氣一般，圍繞在身邊存在著，並不需要特別強調。而自由是史代納的核心概念，教師要小心呵護成長中孩子內在的自由探索，不能讓一個概念以「死亡」的姿態出現在孩子面前。而想像是重要的立基點，是教學三步驟中首先要注意的事情。本段落從這自由與想像兩方面切入，找出這兩點與美感的關係。

一、自由

在我的胸中，住著兩個心，
一個想從另一個掙脫掉
一個在粗鄙的愛欲中
以固執的器官附著於世界
另一個則努力超塵脫俗
一心攀登列祖列宗的崇高靈境。

《浮士德》I，1112-1117

史代納的想法帶有極高的靈性觀點，他在《自由的哲學》一書中引用了上述歌德的一段話，一個心屬於物質世界；另一個心則來自靈性世界。史代納對自由提出了這樣一個大哉問：「處於思想和行為（Handeln¹）中的人是一個靈性自由的存在（freies Wesen），還是被束縛在一種純粹自然規律的鐵一般的必然性（Notwendigkeit）之下？」（王俊譯，2017，頁 11）。對人而言是否有意志上的「自由」，是多數人一直思辨的問題，有人視之為人類最珍貴的資產，也有人認為那不過是自然法則下的必然性。當嬰兒感到肚子飢餓，是遵循內在的意願而哭泣尋求食物嗎？當一個處在青春期的國高中生出現叛逆行為，是基於自由意志對抗世俗的教條嗎？當課堂中引入無限的概念，學生是依自己的意識接受或抗拒該觀念嗎？一個行動者對自身行動的起心動念並無意識時，他們是處在不自由的狀態下，就好比在自然定律下，所有的東西都會往下掉一樣，是受外在束縛所羈絆的；而當行動者意識到自己行為的原因，清晰的掌握住每一個行為的背後動機，才可以說是自由意願下的行動。嬰兒是在無意識的狀態下，單純因為肚子餓而哭泣，是不自由的（王俊譯，2017，頁 16）；處在青春期的青少年若無意識到自己為何

¹ 王俊翻譯《自由的哲學》一書，是從德文原版直接譯成中文，所以括號內為德文。

要對抗教條，無意識要獲得到哪一種結果，是不自由的狀態；在聽到無限的概念，單純只是因為老師的威權而接收，也是一種不自由的意識行為。反之，若是經由與過往的經驗進行辯證，有意識地思辨，則是自由的，因為這個決斷是由行動者自己的內在決定。我們可以說，真正的自由是需要倚靠思考的力量來完成，而思考可藉由感知來認識世界、了解自己。感知是思考的基礎，經過思考才能達到真正的自由，下文將從這兩大方向來理解史代納關於自由的觀點。

（一）感知－思考的基礎

所有的自然現象早已存在，人唯有透過自身感知器官的變化過程去感受每一個現象，運用思考將不同的概念組織起來，才能得到最真實的感知。一個人要從對一件事物的感知中，進而形成一個整體的概念，需要本身有意願的參與其中，想對一個事實進行解釋，先把自己抽離出該事實之外，意識到自己與世界的不同，是相互對立的兩個部分，但同時又不喪失情感的知道自己屬於這個世界，是世界中的一份子，不斷的透過思考尋找到自己與世界合一，我們從所觀察的現象法則中，運用思考探尋到背後連結的定律，將世界存有的法則一一轉化成我們的思維內涵（王俊譯，2017，頁 26-27）。當我們抽離出與表象的關係時，就會與表象產生離斥感，也因為這一種離斥的關係，我們才能更看清楚表象中所要傳達的概念，也才有機會藉各種方式來理解展現在我們面前的表象，也就是說我們因離斥而獲得了概念。另一方面，當我們有了夠多、夠深的理解之後，才有機會與表象連結在一起，產生融合感。如果一開始就與之融合在一起，是無法看清各種表象之間的差異（芮虎等譯，2014，頁 48-50）。感知是認識世界的基礎，每個人都會有屬於自己的感知，透過自我內在的思考辨證，才能從中獲得屬於自己的概念。

（二）思考－自由的基礎

唯有透過自己思考才能形成屬於自己的概念。一個自然現象的定律法則要在自我的心中成形，首先要觀察，對事件的表象進行觀察，再藉著「吾」參與其中，對整個過程進行思考，才有機會形成屬於自己的內在概念，從觀察到思考，一定要有我的參與才算是真正的存在（王俊譯，2017，頁 37）。當老師在教分數的加減時，可以用披薩切片的方式讓學生看見等值分數²的關係，接下來才能進入分數量的加減，當學生未能將具象的分數量內化為自己的概念，就會進行無效的計算，很容易直接分母加減、分子加減得到新的數值，而不是通分成相同分母再進行分子的加減。要令分數加減的概念進入學生的思想之中，唯有學生願意將觀察到的現象，經過自己的思考，才能形成自己的概念，才會在下次遇見相同的關係

² 等值分數：將一片圓形披薩對半平均切成兩份，每份佔全部的 $\frac{1}{2}$ ，如果將一整片平均切成四份，取其中 2 份，得到全部的 $\frac{2}{4}$ ，所以 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ，即為等值分數。

時，運用同一個概念進行運算。

當自然現象發生時，思考只是一個配角，而我們開始尋找每一個相同的發生都會對應到相同的結果，在形成概念的過程中，思考就會轉變為主角，透過思考將概念清晰化，內化為自己能掌握的概念。而思考究竟是怎麼出現的呢？自然現象先於我們早已存在，所以我們很容易對自然現象進行觀察，而思考卻是自己創造出來的，與笛卡爾提出的「我思故我在」些許的不同處在於，這裡出現的「我思」是與「我」同時存在的，這個我並不單純是指身體上的存在，而是以一種靈性存有的方式住在一個身體裡，在思考的同時，我與思考就會同時出現（王俊譯，2017，頁 46）。唯有我創造出思考，思考才會存在，如果我們對這個思考要進行觀察，就不可能在思考的同時一起進行，而是要將自己提升到另外一個層次，帶著更清澈、更寧靜的心；以中立的態度對思考進行回顧式的觀察（王俊譯，2017，頁 50）。唯有透過我保有自由、開放的心創造出屬於自己的思考，雖然思考的內容會有對、錯之分，但一個人思考著就是一件對的事，如果我們反覆的觀察著自己的思考，確認自己是如何進行思考，也就能將思考更清晰化，並且在思考之中找到思考的本質（王俊譯，2017，頁 57）。

（三）自由的觀念

史代納提到人類的生命分成三種狀態：清醒、有夢的睡眠及無夢的睡眠（何畫魂譯，2012，頁 141）。帶著清醒時，自己思考著的問題，與世界做出連結，透過感知到的表象形成心智的圖像，在睡夢中與更高層的世界作出新的連結。深沉無夢的睡眠中是一種對靈性的傾聽狀態，保有專注與沉思，將感知到的一切注入靈魂的力量，使靈魂變得自由，在體內不斷的成長茁壯，變成一種更成熟的存在（何畫魂譯，2012，頁 145-146）。從感知到形成概念是透過自己內在的意識經由思考而形成，這是人類獨有的生命特徵，將每一個在眼前的表象經由思考產生行動力去追尋理解自身所在的世界與自己的關係，雖然世界的存在具有每個人都會感知到的普遍性，但每一個概念的成形都不是經由外在的權威直接賦予我們，必須要經由自己的意願，以自身內在的思考統合成個人的觀點，當人建立屬於自己的觀點，以一種近似直覺般的行動，才會是自己真正的行動，自己才會是行動者本身（王俊譯，2017，頁 99）。當他意識到應該去做一件事，他就會去完成，不受外在的規範所影響，是受行動者自己內在的意願所驅動，只有這樣的意識行動才是真正個體的自由行動。自由的行動並不會排除任何的法律、道德或任一種自然法則，而是將之納入自己的思維之中，自由的人活在信任之中，他相信，每一個自由的人都與他擁有相同的世界，他們會彼此相遇，雖不要求大家都要和諧一致，但卻如此的期待著。生命中總是存在著自由與不自由的行動，而每一個完善的行為，是只有自己才能給予自己的，人不是為道義而存在，而是道義通過人而存在（王俊譯，2017，頁 170-177），由個人以自己的方式認識世界，自己決定是

否遵守任何一種法律或道德規範，但不放過任何一個細小的內在聲音，檢視每一個產生於腦中的念頭，才會是一個真正自由的人。

一個教育工作者必須做到「每一件事情自己都是開創者、對世界的所有人事物感到興趣、教學是追尋真實最佳的呈現、保持生氣勃勃的靈魂狀態」四個堅持（林琦珊譯，2013，頁 194）。在課堂上傳遞概念時，同時也要在自己的內心深處與課程一同成長，使意志、情感與思考不會倚賴物質身，給孩子充滿感受的圖像，並保有想像的空間，透過歸納規則性的事物，建立自我的判斷力，不僅能理解具象的關係，也能整理出背後的抽象關係（林琦珊譯，2013，頁 186-189）。學生經過自己內在的思辨，為自己的思想與概念做出屬於自己獨有的連結，帶著自己的意識，用自己的思考，以自己的力量得到相關的概念，不論是哪一位學生都可以在老師熱情的教學過程中，透過良好的課程設計引領學生到達那個美麗存在的普遍性及必然性，雖然有無數多條路徑可以到達，每一位學生都能自由的為自己鋪設一條思想的康莊大道來抵達。

二、想像力

我可以跟藝術家一樣，
自由揮灑我的想像力。
想像力比知識更重要，
知識是有限的，
想像力卻可以囊括整個世界。
邏輯能讓你從 A 到 B，
想像力能帶你去任何地方。

阿爾伯特·愛因斯坦 Albert Einstein 1879-1955

在自由的狀態下，開放自身的想像力，能幫助自我更容易獲取概念，史代納認為人是有超感官的感知能力，而想像力是其中的基礎階段，是教育中一個重要的路徑，才能在往後的學習過程培養出靈感，深化成直覺。史代納關於想像力的說明，是需要一顆開放的心在腦中建立一幅幅流動的圖像。

1. 想像力：感知的開放

要能讓想像力得以發揮，需要開放感知，並且做邏輯性的思考。史代納認為想像力一詞有很深層的意涵，是一種超感官的知覺，是要超越清醒的意識，是一種「觀察著思考」狀態的純粹思考。透過每日的回顧，以圖像式的思維模式訓練想像力的開放度，讓想像力得以在有意識的狀態下從內在能自由的展現（Barton, 2019，頁 1-2）。一個人在對一個客體進行認知的過程中，首先是透過感官去感知，

產生對客體的認識，但是若無外在之物，就需要透過想像力的幫忙，相對於無意識的幻想，此時的想像就要取代感官感知，透過自身內在的心魂，甚至來自靈性般的天啟以便能夠得到圖像（Barton, 2019, p.7）。在史代納提出的教學三段論中——「連結³」（conclusion）、判斷（judgement）、概念（concept），首先就是要在一個清醒的狀態下，透過意識與過往的生命經驗做出連結，這當中帶有相當程度的想像空間（芮虎、李澤武、廖玉儀譯，2014，頁 205-210）。以數學中三角形的外心為例，若一開始就為外心下定義，會令外心這個概念的鮮明色彩瞬間失去它的美感，讓學生失去品味發現數學關係的樂趣。若改成讓學生各自任意畫一個三角形，再畫出此三角形的三邊中垂線，接下來就讓學生們自行觀察每個圖形彼此之間的特徵，讓圖像在腦海中一幅幅的流動著，由每一個圖像對學生傳遞出它的共同特性與彼此的差異性，保持心胸的開放度，自由的觀察圖形間所要傳達的秘密訊息，再依循、善用自己過往的相關概念，對整體做出邏輯性的判斷，得到更進一步的新概念。

2. 想像力：圖像的流動

在華德福的幼兒教育中，沒有單一功能的玩具，在遊戲時，所有的物品都是可以拿來做任何一種角色的扮演，孩子們透過想像力來跟大人傳給他們的一切作融合，運用豐富的想像力，與所有的藝術活動來拓展自己的心魂（鄧麗君、廖玉儀譯，2007，頁 44）。人每天都在經歷三件事：與個人的內在心靈相處、跟日常生活的自己為伍、對所處世界發生的事務做出連結。而這種種的發生可能出現好事，也可能是諸多不如意之事，如果我們深陷問題的深淵，將會無法自拔。透過冥想（Meditation），可以使心靈中的內在圖像發揮作用，覺察到自己的內心似乎會被一種突如其來的聲音進入，與自己內在的想像世界做出呼應得到來自靈性世界的力量與勇氣（鄧麗君、廖玉儀譯，2007，頁 118）。冥想是自己的決定，是因為內在願意相信冥想的力量才有可能願意去做，是一種自由的行為展現，沒有一個人可以被強迫，是對冥想對象的愛所引發，以求轉換心境，覺察到原本未能感知到的地方，運用想像力得到追求解決問題的契機，進而能夠幫助自己將待完成之事圓滿解決（鄧麗君、廖玉儀譯，2007，頁 119）。人們總是希望將一切準備就緒，想規劃好待做事物的每一個步驟，對學習也總會有按部就班的期待，會害怕自由的思考，若是這樣，我們將失去從自由判斷中擷取靈感的機會。我們可以準備周全、規劃好做事物的步驟，但我們更可以在做好這些的同時，放下心中的期待，透過冥想用想像力迎接來到面前的挑戰，具足追求真理的勇氣，強化心靈

³ conclusion：中文通常譯為「結論」，因為文句翻譯的過程容易有情境上的誤解，造成對原本意涵產生混淆。若將 conclusion 做字根拆解，con 的原意是 with，也就與什麼在一起的意思，sion 是做什麼的過程中，而中間的 clus 原意是 close，有結束、緊密之意。所以 conclusion 有著「帶著過往感知的經驗與眼前所遇見的情境緊密在一起的過程」。這裡史代納的意思比較適合翻譯為「連結」，而不是原本字義上的「結論」。

責任的敏感度（鄧麗君、廖玉儀譯，2007，頁 122）。史代納的冥想練習詩：「在感官體的表象中，有著精神的意志，好比智慧之光照亮四周，又蘊藏著內在的力量…」，透過冥想，我們能找到那一股內在的力量，才有機會善用那一股力量（鄧麗君、廖玉儀譯，2007，頁 125）。

綜上所述，史代納提到的自由，是先有自由感知，進而思考，最後達到有意識的自由思考。在自由感知時，人可以隨心所欲，用過往的經驗感知來到眼前的現象，任何的感受都自由地讓它發生；在思考時，容易受過往知識背景所影響，難以跳脫過往的經驗，需要敏銳的觀察、自由的思考，嚴謹的辯證，既不被過往的知識束縛，又不能失去邏輯理性的思考著，做出最自由的判斷，得到寶貴的概念。至於想像，是要放開感知，讓內在的圖像流動，使之充滿著無限的可能。要啟動想像的能力，必須要放下過往的束縛，開放自身的感知，同時讓圖像有邏輯的流動起來，進而得到來自天啟似的靈感，是與天馬行空的胡思亂想有所不同的。自由與想像是兩種不同的能力，但當一個人帶著自由對觀察著的一切做思考，從中進行想像可能發生的情況，是一種進入自由想像的狀態，對來到眼前所發生的一切現象，會有更多、更具創意可能的出現。以感知為基礎，透過感官覺察周遭的一切，培養出美感的判斷力，過程中讓學生自由感知，體驗世界中各種美的展現，開放感知、讓內在圖像流動，發揮想像力，運用思考做嚴謹的邏輯推理，為自己做出自由的判斷。在嘗試解決問題的過程中，除了能運用理性的思辨進行各種分析之外，那怕遇到各種困境、挫折，還是保持主動積極的心，善用想像、創造驚奇，以自由感知、自由思考的狀態得到真實、純淨的美感經驗。

參、投影幾何的內涵：從整體看細部

在數學發展的長流中，新觀念都是需要一段時間的蓄勢，經過長時間的檢驗才能被人所接受，當既有概念存在並影響深遠，新觀念就更難被世人所接受。《原本》這部偉大的著作就是這種現象的典型代表。歐氏幾何學從「內」在的經驗感受出發，以「不證自明」為「正確」的基礎，是其研究的立基點，用邏輯演繹的方式建立內容。以三角形的性質為例，從可接觸的三角形中，觀察其特性，在有限的大小內，推理得到所有三角形的共有抽象性質，如內角和必為 180° 、正三角形的每一個內角都是 60° ，這種概念既直觀又與自身經驗相連結，相對容易讓人接受，早已深植多數人的心中。但總是有人能從中跳脫既有的框架，並試圖給予挑戰，但真正成功的人往往需要更大的想像空間，更多嚴謹的內在思辨，懂得檢視既有的知識架構，並從周遭的生活經驗中尋找蛛絲馬跡，努力將視野看往更寬闊的遠方，讓想像力跨越既有的框架，才會有後來的解析幾何、投影幾何，向量幾何及非歐幾何。非歐幾何學以「外」在的存有為前提，保有理性的邏輯推導，得到並非直觀可見，卻真實存在的整體概念應用，以空間平面為例，我們身處的地球，並非一個平坦且無限延伸的理想平面，而是一個彎曲平面所形成的橢圓球

面，它大到人類無法親眼所見整體，但卻又可以從細微的變化中，想像可能的存有，好比三角形的內角和不必定是 180° ，而是需要視平面的彎曲程度及大小才能確定。藉由想像力的自由奔放，做理性的推斷，數學家們得以窺見另一種幾何觀點的奧秘。而這種情況是如何一點一滴在人類的努力下完成。表 1 說明歐氏幾何、投影幾何及非歐幾何在概念立基點上的差異。

表 1 三種幾何的概念立基點

	歐氏幾何	投影幾何	非歐幾何
立基點	由 23 個定義、5 個公設及 5 個公理出發建立幾何觀點。	在歐氏幾何的脈絡下，將透視學中的消失點視為平行線的交點。	否定第五公設，以曲率區分幾何觀點 橢圓幾何曲率為正 雙曲幾何曲率為負
平行線觀點	平行線沒有交點，過線外一點僅有一條平行線。	平行線在無限遠有一個交點。	過線外一點可以有 0 或無限條平行線。

資料來源：研究者整理。

投影幾何延續並拓展歐氏幾何的觀點，提出平行線在無限遠有一個交點的「本質」上轉變。人類在中世紀時的繪畫，並沒有透視（Perspective）的觀念，可能是因為教會、權力、戰爭、文化、對世界觀點的不同，而在繪畫上以有趣、有意義、著重關鍵處的畫風為主要呈現方式，並不一定要有真實性，可以有各式各樣的想像空間，也就出現了許多不符比例的圖畫出現。於是開始有人思考如何呈現遠、近相關位置，進而發展出各種透視技法，從一個消失點、二個消失點到三個消失點，逐漸完整透視技法的應用。也因為從透視觀念中，視覺上的平行線會有一個消失點，似乎就像是兩平行線在視覺的最遠處交會一般，畫家們嘗試遵照比例的關係將之畫在紙上，但要如何確定其精確的比例關係呢？也就促成數學家投入相關的研究，人類開始用一種「透視幾何」的概念重新挑戰《原本》中對第五公設的論點，當然，數學家們有其更崇高的理想，有一種趨向建立純幾何學的理想，是一種對幾何學的純粹思考，不需要夾雜代數，這當中的先驅者，是笛沙格所帶出的投影幾何。

一、由整體看細部－吉拉德·笛沙格（Girard Desargues1591-1661）

笛沙格的年代與笛卡爾相近，兩人也是朋友。特別的是笛卡爾以解析的方法將幾何往前推展；而笛沙格以投影技巧統一了圓錐曲線的概念，好比圓在不同的角度下觀看就是一個橢圓，而這等價於將圓投影到不同於圓本來所在的平面上。而要統一所有的視角就不得不納入無線遠點，為了這個需求，笛沙格將往兩邊延伸的直線視為在無限遠處交會；同一平面的兩相異直線在有限處或無線遠處相交，而所有無線遠點的集合形成了無線遠線。圓錐曲面被平面所截出的圓錐曲線，也就與圓柱被平面所截的概念相同，因為圓柱不過是頂點在無線遠處的圓錐。更

進一步可以推得，橢圓與無線遠線無交點，拋物線與無線遠線相交於一點，而雙曲線與無線遠線相交於兩點（李文林譯，2004，頁 359）。

笛沙格一生中並無太多的著作，當年出版的第一本書－試圖處理圓錐與平面相交的計劃草案（*Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan*）並不暢銷，從他與笛卡爾的信件中，可以發現原因出在他對自己使用符號的堅持，造成該本書不易閱讀（J. V. Field; J. J. Gray, 1987, p.176），直到 1864 年才被重新發現並出版，因為此書不易閱讀，故筆者從相關書籍《Topics in Mathematics for the 11th Grade》，嘗試以臺灣熟悉的數學語言輔助說明笛沙格定理。

圖 1 當 $\triangle ABC$ 被一個光源投影到另一個平面形成 $\triangle A'B'C'$ ，連接各對應頂點的直線會分別相交於 P 、 Q 、 R 三點，而這三個點會在同一條直線上。當然，我們也可以視 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 在同一平面上。

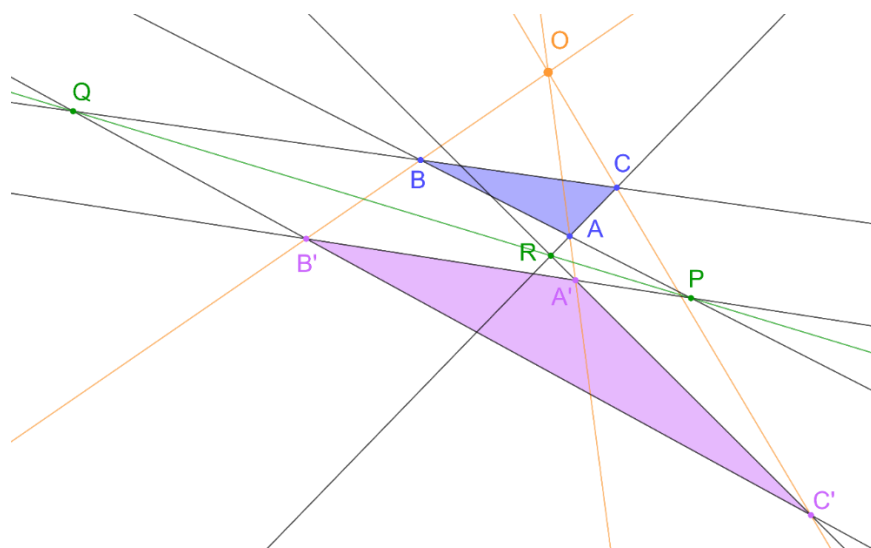


圖 1 笛沙格投影定理

資料來源：研究者整理自李文林（譯）（2004，頁 359）繪製

在無限遠點的基礎下，重新檢視雙曲線（hyperbola）（圖 2），想像 P 點沿雙曲線的軌跡往右下方（ P_1 ）移動，逐漸接近直線，直到無限遠的位置與直線相交而從左上方出現，再沿雙曲線的軌跡（ $P_2 \rightarrow P_3$ ）往左下方移動，同樣在無限遠處與另一直線相交而從右上方出現，然後回到 P 點。若從中文字面上看待「雙曲線」，似乎形成了兩條曲線；但英文名稱「hyperbola」中的「hyper」有「超出」的意思，可以看出「hyperbola」是「一條」超出無限遠處再回來的曲線。

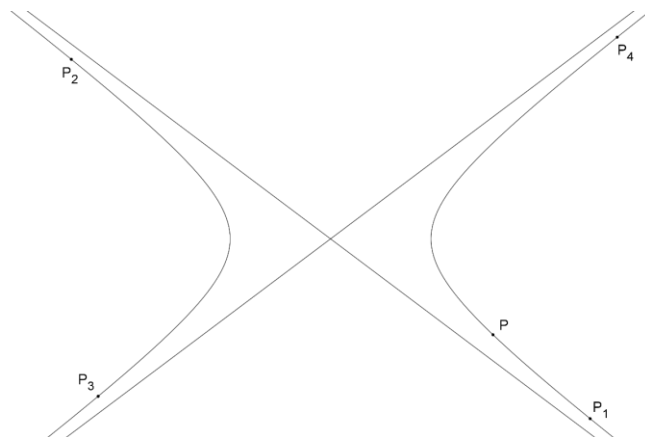


圖 2 雙曲線視為單曲線

資料來源：研究者整理繪製

投影幾何除了帶進「無限遠點」的概念，還給出了看待幾何圖形的新觀點。在歐氏幾何的觀點下，直線是由無限多個點構成，相異兩點確定一直線的位置，而投影幾何轉換成以一條直線有無限多個平面通過它，由其中兩個平面相交確定直線，以這樣的想法，建構出點、線的對偶性質。為了進一步認識數學上的對偶關係，我們以新觀點重新審視圖 1，並作反向思考，先畫一線然後在線上標出 P 、 Q 、 R 三點，令 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 的三邊延長線分別對應過 P 、 Q 、 R ，連接各對應頂點的三直線會同時通過光源 O 點。從對偶關係中，看見圖形的點、線互換，呈現出另一種思維方式。在傳統的幾何學觀點，圖形最基本的元素是點，無限多個點構成直線，無限多條直線構成平面，再由無限多個平面形成空間。但從對偶的關係中，先從比較整體的空間出發，由不同空間交疊出平面，再由平面相交形成直線，而點的形成是由直線相交而來，形成一種看似完全相反的思考方式。

老天爺給人類的巧合是珍貴的禮物，總是有許多值得我們深思及探尋之處，笛卡爾的小看天下、笛沙格的大看世界，兩者並不牴觸，而是前人給我們靈活運用兩種觀點的契機。笛卡爾將歐氏幾何做量化的運算，結合代數，將原本幾何圖形的關係，以方程式及算式的方式，做量化的轉換；而笛沙格則是將幾何做本質上的轉化，不再受限平行線沒有交點的特例，引入無限遠點的概念，進而將所有的關係一般化，用自由且開放的想像力轉換看事情的角度，將圖形的形變過程「連續」起來，創造出整體圖像。

二、整體到細部對數學的影響

(一) 無限遠點

笛沙格引進了無限遠點的概念，讓人用一種新的想像，並以大視野看待舊圖形，在此以三種圖形為例來說明。圖 3，圓心 C 不斷遠離直線 L ，並且不斷放大半徑，同時圓 C 保持與直線 L 相切，當圓心 C 到達無限遠處，並且半徑為無限

大，可以說此圓與直線完全重疊，成為一條直線。想像其他多邊形無限放大，也都會跟直線一樣，換句話說，所有的幾何圖形，在無限遠處，都是一樣的圖形。這種大膽看圖形的方式或許過於挑戰一般人頭腦中的思維，卻是想像力自由奔放的重要因素。

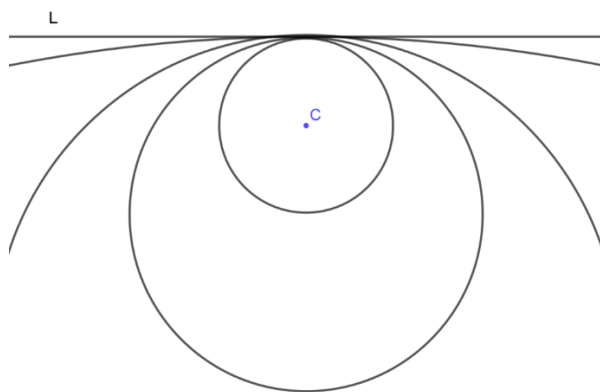


圖 3 圓與直線

資料來源：研究者整理繪製

圓錐曲線的共通性也可以用無限的觀點達到一致姓，圖 4a 是橢圓，如果 B 點不斷地向上延伸到達了無限遠的位置，形成了拋物線（圖 4b），當 B 點從無限遠「折返」，形塑出雙曲線（圖 4c），是否可以說這三種圖形是相同的，只是在不同位置觀察時出現視覺的不同圖像而已。（鄧麗君、廖玉儀合譯，2007，頁 96）

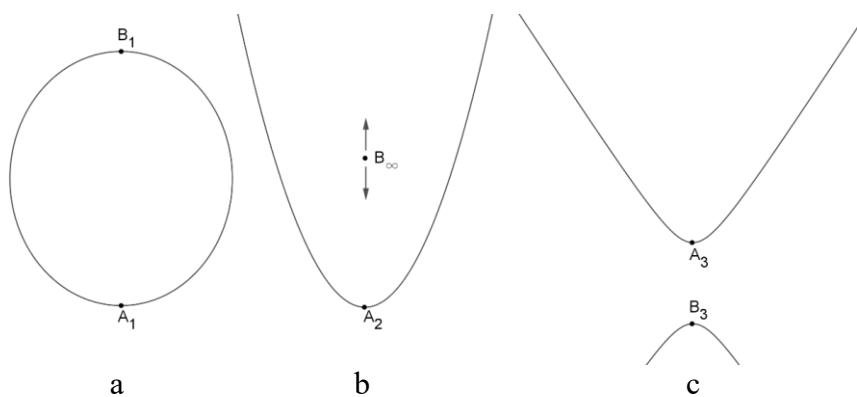


圖 4 新觀點看圓錐曲線

資料來源：研究者整理自鄧麗君、廖玉儀（合譯）（2007，頁 96）繪製

Oloid 是一種三維曲面，由保羅·沙茨（Paul Schatz）在 1929 年發現，將兩個全等的圓過彼此圓心垂直擺放，無論 P 點在 x 軸上的哪一個位置，與兩圓的切點連線段 $\overline{AB}$ 都等會是 $\sqrt{3}r$ 的長度，以相同的長度沿圓周移動所形成的可展曲面（torse）即為 Oloid，將 Oloid 置放在平面上，可「直線」滾動，並且它的所有表面都會接觸到該平面。想像 P 由圖 5 中的位置開始向 x 軸的負向移動，到達無限遠之後，從 x 軸的正向「回來」，因為 P 經過了無限遠，而完整形塑出 Oloid。

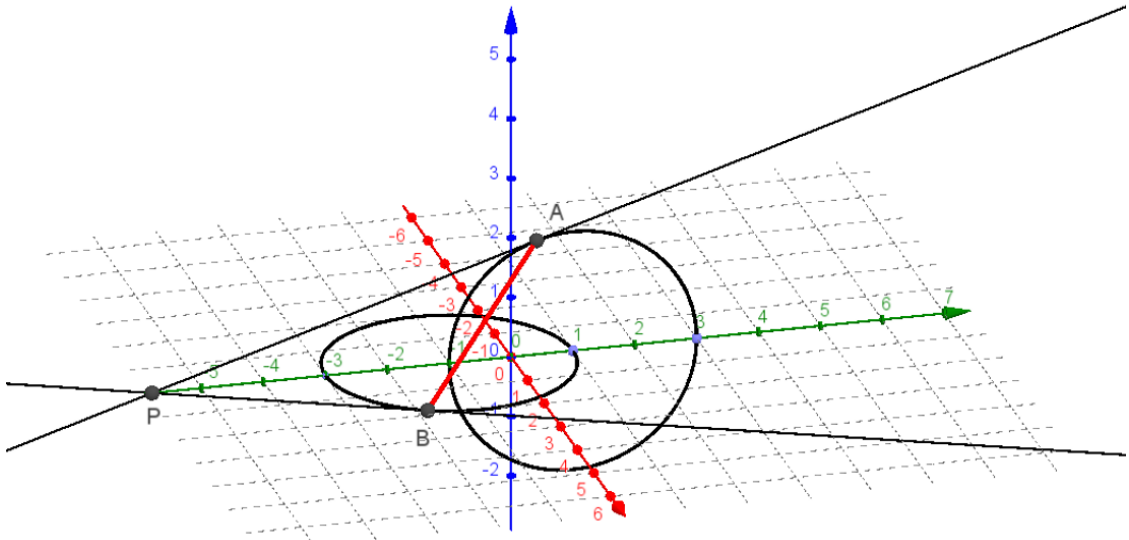


圖 5 解構 Oloid

資料來源：研究者整理自 Dimb"ock; Stachel（1997, p.2）繪製

以上三種看待圖形的新觀點，都在有了無限遠點這個概念後而產生，不需要再以特例來看待，尤其是 Oloid，這是一個確實存在生活中的形體，也確實需要將 P 點移至無限遠，才能形塑出「最後」一段 $\overline{AB}$ 來完整呈現 Oloid 的存在。

(二) 對偶性

原本兩點連成一直線、兩線確定一平面的關係，從對偶的角度下，看成：兩線交於一定點、兩面決定一直線，並為圖形帶出新的想像。例如：圖 6 左圖，在歐氏幾何的觀點下，圓是由與圓心距離均相等的所有點構成，然而圓也可以視為由無限多條線所構成，如圖 6 右圖。從對偶的關係中，可進一步探討內、外的轉換，圖 6 右圖的空白部分，似乎要看成圓外才是比較合理的，因為線把平面佔據之處稱為內的話，只有空白處並未有任何直線經過，所以稱其為「外」，將圓的內、外觀點做了翻轉。

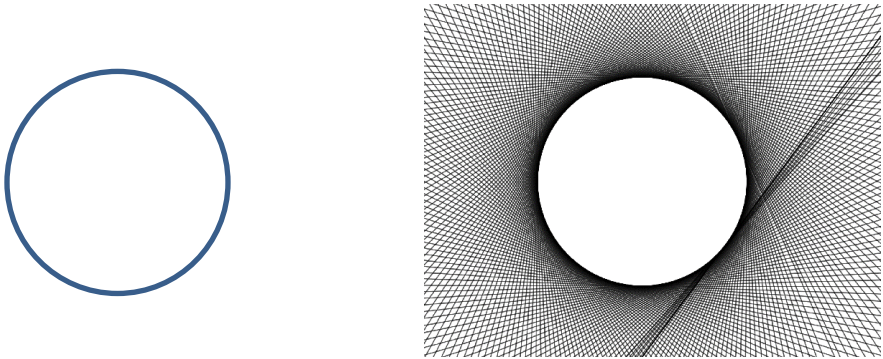


圖 6 點與線形塑圓

資料來源：研究者整理繪製

巴斯卡定理（Pascal，1623-1662）：

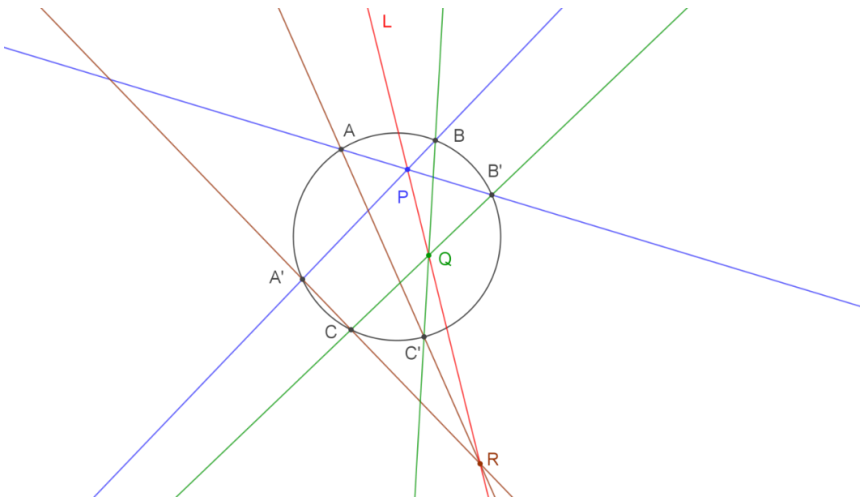


圖 7 巴斯卡定理
資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014, p.141）繪製

其作圖步驟為：

1. 在圓上任取六點 A 、 B 、 C 、 A' 、 B' 、 C'
2. 連 AB' 、 $A'B$ 得交點 P （藍色線）、連 BC' 、 $B'C$ 得交點 Q （棕色線）、連 CA' 、 $C'A$ 得交點 R （綠色線）

則 P 、 Q 、 R 三點共線，我們稱此線 L 為巴斯卡線

在巴斯卡提出了其定理的一百多年後，布萊安強（Brianchon, 1783-1864）發現了巴斯卡定理的對偶關係－布萊安強定理：

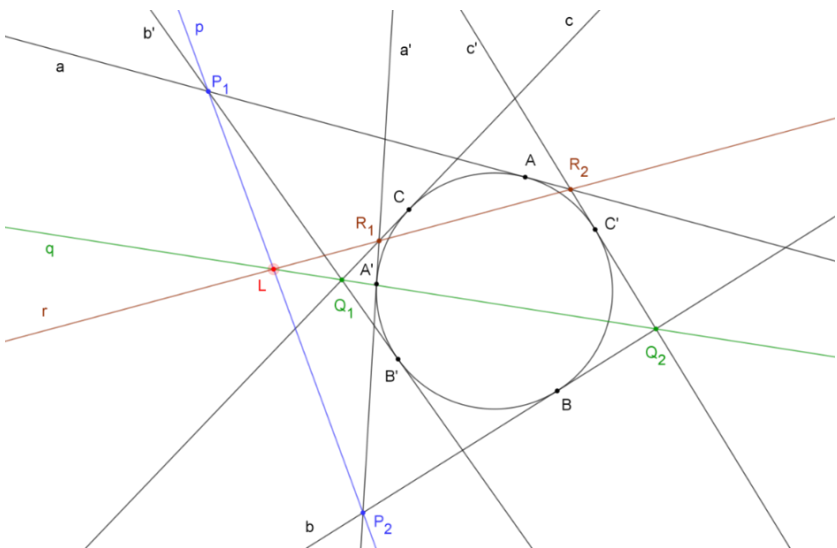


圖 8 布萊安強定理
資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014, p.141）繪製

作圖步驟為：

1. 在圓上任畫六切線 a 、 b 、 c 、 a' 、 b' 、 c'
2. 連 ab' 、 $a'b$ 交點得交線 p （藍色線）、連 bc' 、 $b'c$ 交點得交線 q （綠色線）、連 ca' 、 $c'a$ 交點得交線 r （棕色線）
3. 則 p 、 q 、 r 三線共點，我們稱此點 L 為布萊安強點

從定理中可以感受到點、線的對應，透過縝密的思辨，找出點、線兩者清晰的關係，清楚確認不同定理間的對偶性，除了能從圖形繪製之間看見對偶性，也在每一個定理作圖步驟的書寫中，讓文字也能精準的對應。

肆、投影幾何課程的教育意義：有美感的數學素養

史代納曾提及：投影幾何對想像空間充滿巨大的挑戰，運用想像力以一種自我得以突破且極度自由的模式重新探索幾何，他預期投影幾何可以達到三件事：

1. 具有很大的治療前景。
2. 為青少年們帶來二元性的概念是相當重要的。
3. 當他們透過一些初步的基本思想，達到雙重性的原則，使他們感到困惑和驚訝，老師就已經實現了所有應該實現的。（Peter Baum etc, 2014, p.49）

研究者任教的華德福學校，以人的發展圖像為前提進行課程設計，用 7 年發展論為架構，培養學生在各階段所需發展的能力。以數學課程為例，剛上高中時期的學生尚處於探索自我的階段，從認識外在的環境中反看自己在這個世界的定位，此時三角函數與指對數可以就理性層面帶給學生安定感，利用儀器精準測量地理位置與高程，有助於幫學生以更有方法、更有效率的方式做探尋，此時的教學，在某種程度上以能安定學生迷茫的心，比學會所有的概念來得更為重要。學生需要更真誠如實的看見自己內在狀態，確定自己想要追求的方向。當學生來到十一年級（高二）的階段，將注重心靈上的內在探索，找出自己思考時所依據的論點，有邏輯性的推理分析，建立整體圖像並關注細節，最後能清楚解釋自己提出的論點，在練習思考的過程中，要能突破過往的思考束縛，讓觀點更加開闊，能靈活運用。在數學課中，投影幾何課程將是重要的訓練之一，培養學生掌握無限的概念，透過對無限遠點、無限遠線及無限遠面的探尋，學生們的思維空間可以擴展得更加遼闊；並給出點、線的對偶性，打破舊有的概念，讓思考的層面更加擴大，自我檢視為何要接受這一種觀點，而不是另一一種觀點，甚至有更多其他可能性觀點的存在。同樣的，學會此單元所傳達的概念並不是最重要的，重要

的是讓學生仔細檢視觀點形成背後的成因，自己是基於哪一種立基點，憑藉著自由想像與邏輯推理，對這個單元得出數於自己的結論。作為一個老師，必定有一個被視為正確的概念要傳達給學生，但並不是制式的教學，而是信任學生會透過自我內在的判斷，在最終的旅程上以自己的方式找到那一個共同的論點，為自己以自由的判斷總結出一個概念。

一個學生進入大學之後，不論是技術或學科，都將以專精的學習為目標，而高中階段探索出自己想要的方向是非常重要的環，在這個奠定未來方向重要的時期。首先著重在聽見自己內在的聲音，在高二時，用自己過往 16 年的經驗找到自己認識世界的方式，這個過程中是如何受到大人們的影響？畢竟過往的學習很大一部分是來自權威的教導。以幾何為例，都是在歐氏幾何的範疇下學習，是以接觸得到的有限空間來建構對整體世界的想像，是否只是受限於外在的因素而決定了自己的觀點？是否只是來自權威的學習、憑著之前的經驗而做出判斷？若不是自己內在的真實聲音，就不算是一種自由的判斷。培養學生運用想像力拓展出不同的可能性，為自己的判斷進行一次又一次嚴謹的檢視，從中確認自己所思所想是正確的，透過有邏輯的批判性思考，得出經得起考驗的結論。投影幾何為這樣的理念帶進更深更廣的視野，給出良好的訓練，在教學的過程中處處激發出與過往認知的不同感受，引領學生享受在驚奇與疑惑感之中，慢慢地靠自己的思考掌握他們遇見的概念，並以自己的力量獲得不同於過往數學所帶來的美感經驗。以下分成聽見內在真實聲音、自由判斷、批判性思考、美感教育四部份加以說明。

（一）聽見內在真實聲音

在華德福學校 11 年級會有一門「帕西法爾」的主課程，故事的主軸是主人翁回顧過去的經驗，想像未來情境，在自身目前面臨的情境中做「自由」的個人判斷。而能達成此目標的首要任務就是聽見自己內在的聲音，從自我的意識中，不斷的內省、進行深度思考，甚至透過冥想的方式進行思辨，從中感知自己的直覺並理解自己內在的真實聲音，持續保持學習與成長，提升對自己的認識，調整內在聲音建立與新經驗和洞見達到一致性的概念。華德福學校強調意志、情感、思考，此時的 11 年級正從思考中的情感過渡到思考中的思考。在投影幾何課程中，透過圖形變化的連續性，讓學生必須在經歷無限遠處做思辨，感受無限遠處存在的可能性，過往所學的歐氏幾何，平行線是永遠不會相交，但現在卻要面臨無限遠點的存在，這是第一個要面對的疑惑，並且還要依此掌握住無限遠線及無限遠面的關係，在這個過程中，不能放過任何一個自己曾經從心中產生的疑惑，真實的與這個疑惑共存，不論當下能否接受此一論點的說明，都要以真誠、開放的態度面對。

（二）自由判斷

教育工作者有一個終極的概念要傳達給學生，是一種具有普遍性及必然性的觀點，但過程中，信任每一位學生可以由他自身的生命經驗與過往所學習到的知識來獲得，透過本身的思辨為自己的觀察做出整理、歸納，以最自由的方式判斷而得到一致性的結論。這在目前以考試為導向的體制教育中並不容易做到，現今體制的教學過程中，以權威的方式強制給予各種知識，並要求學生理解，忽略學生學習過程中的生命感受，缺少讓學生以自我的想法，在內心深處做出判斷、進行辨證。雖然公平客觀的紙筆測驗形式有相當的重要性，但評量不一定只能有單一的紙筆測驗，也不是只能有一種制式性的標準，給出學生判斷過程的空間，信任學生會從中得出屬於自己的觀點，卻又不會失去對概念的掌握，是需要在這階段給出多種看待世界的觀點。投影幾何以無限遠點、線、面的存在及對偶性兩大觀點，挑戰學生與過往思維的不同思考模式，將傳統「點域」的平面轉換成以「線域」定義的平面思考，帶進更多元的思維方式，透過理性思考的邏輯辨證，體認到定理及圖形間的驚奇感，在對觀點的陳述過程中，與過往所學產生內在衝突的嚴謹辨證，從疑惑中得出屬於自己的自由判斷，是課程想要培養學生的一種關鍵能力。

（三）批判性思考

學生在學習的過程中，不僅僅是接受、記憶及理解各種知識，更要兼具深度與廣度，以邏輯推理的方式全面思考其中的各種關係。培養學生質疑的習慣，以深入了解問題的每個面向，確保沒有遺漏任何重要的細節，檢查所依賴的假設是否成立，以確保基於正確的前提進行思考和分析。透過廣泛的閱讀，同儕間的分組討論，分享彼此的想法，清晰陳述並書寫出自己的觀點，聆聽他人的想法與觀點，學會從不同的角度看待問題，想像不同觀點的合理性，除了理解、應用及分析各種概念外，存有超越它們的企圖心，對自己的思考過程進行反思，認識到自己可能存在的偏見或局限性，同時比較不同觀點的差異性，進行深入的研究，以便做出全面的系統性評估。訓練批判性思考是一個漸進的過程，需要時間努力和不斷間的實踐。藉由分析找出各種影響的細微之處，藉由邏輯推理能力確認前因後果的連結，每一種結果的產生是經由哪些不同原因所造成的，鍛鍊從具象到抽象的思考能力。傳統對空間的理解上，總是分為三個維度：上下、左右和前後，每一個真實存在的物體只能在空間中出現在我們眼前，由外部產生各種現象，再由人類賦予它形式上的意義；而投影幾何將經驗感知與數學理論聯繫在一起，將藝術家透視技法的消失點與平行線在無限遠相交的觀點融合在一起（Peter Baum etc, 2014, pp.51-52），透過清晰的定義、嚴謹的邏輯演繹，打破框架，以新的觀點重新檢視傳統的幾何學，帶出另一種全新的風貌。

(四) 美感教育

美感教育能培養對細節的敏感度，深入地感知各種元素的存在，理解這些元素如何共同創造出美的效果，理解不同的情感和思想，學會用藝術性的方式來表達自己的想法和情感。有助於聽見內在的聲音、開啟自由的判斷、培養批判性思考的能力。在解決問題的過程中能多元觀察、深入了解、客觀閱讀、尋找靈感，勇於嘗試創新，學習批判性思考尋找方法得出答案。美感教育不僅僅局限於藝術領域，它可以與數學、哲學、體育...等各種領域相結合。投影幾何藉由一張張點線關係的手繪圖，從作圖過程就不斷帶給學生們一次次的驚奇感受，再藉由清晰的思考得到異於過往概念的奇妙經驗，享受從不同視角看待幾何的全新感受，不僅僅欣賞到圖形的具象美感，也體會到抽象思考過程中真實存在的美感意涵。

語言的形式不是只有說話時的聲音傳遞，或是閱讀與書寫的文字。自然界中以「圖形」呈現要對人類訴說的現象與真理，而如同聲音有大、有小；有噪音或樂音，文句亦有長短或優美與否，自然界的「圖形」語言在傳遞觀念的同時亦傳遞著美感。而數學中，「幾何」正是以精鍊的點與線所形塑出來的圖形，化簡馭繁地轉述自然界的奧秘。投影幾何用很多的點、很多的線去探索無限的概念，也是人類不斷挑戰自我意識過程中的重要發展。投影幾何必須在一定的規則下作圖，運用最基本的工具：直尺（極少數時間用到圓規）手繪作圖，要求盡力縮小誤差、強調精準度，完成圖形的過程中，進行步驟中的推理，學生能感受到工具使用時的精準度是刺激想像寬廣度的關鍵，而且畫出來的圖是有溫度的，在那個溫度裡孵化出下一次的想像，並再次推理，最後把整個圖形連續起來。這是電腦軟體所無法給予學生的內在經驗，雖然電腦軟體所畫出來圖比較精準，但少了過程的探索，圖形本生也比較沒有生命力、沒有溫度。當學生靜心專注工作後，自然而然進入與美的相遇，會油然而生驚訝與讚嘆的瞬間。投影幾何也重視邏輯推理，但推理的立基點是什麼？必須帶著學生自幾何發展史的脈絡中尋找並理解，在他們已經接受歐氏幾何平行線並無交點十幾年後，突然要給出無限遠點的概念，這對學生的衝擊非常巨大，過程中他們會感到困惑與驚訝，引導學生自發性地想要探索更多會豐富他們內在的視野，藉由點、線的對偶關係幫助學生不落入對、錯的二元對立。相當值得在青少年心中注入如此有感的種子，然後啟動一連串的連鎖反應，以一股探索世界的欲求狀態，遷移至所有領域的學習，從心魂的內在感受，開放自由想像的空間，以理性邏輯推理的方式對世界做整體性的判斷，投影幾何課程有下列五大目標：

1. 運用直尺、圓規兩種基本的作圖工具，呈現幾何最基本的語言一點、線，盡己所能的依照規則繪製出精準的圖形。
2. 覺察自身感受，理解無限概念，並能分析各種圖形在無限遠時的關係。

3. 從點、線兩種視角的轉換，練習數學思考的歷程，由此看見並欣賞對偶性的存在。
4. 運用邏輯推理的方式，對幾何關係做出正確的判斷，進而掌握幾何概念的整體性。
5. 從投影幾何的實例中，練習自由想像的數學思考，產生驚奇的美感經驗。

在內容上，分成十一個單元，前兩個單元嘗試重新詮釋三邊形的定義，帶著好奇心探索「無限」遠處的可能關係；接著以五個單元從各種定理的關係中欣賞對偶關係的存在；再以兩個單元綜合無限及對偶創造出同樣連續的對應極性圖；最後以兩個單元以直線直接形塑出圖形。整個課程由簡單作圖步驟形成精美的圖形開始，吸引學生的好奇心，帶出驚奇感。每個人在相同的規則下作圖，卻有著完全不同的圖形，更多的時候關係會超出紙張外，需要學習者以思考代替繪圖，確認圖形的正確性。在極性圖的繪製過程中，可以進一步的結合對偶性及無限的關係，達成圖形的連續性，為課程做出整體的統整。每張圖的繪製，由淺入深，需要透過自由感知，經由想像與邏輯推理，進行自由思考，做出縝密的自我判斷。在教學上，以小組及團體討論為主，讓學生可以盡情的抒發自己的想法，大家一起努力找到合乎邏輯且一致性的歸納，並不是由老師主導給予概念。在評量上分成學習表現及學習態度兩個面向，學習表現有精準繪圖、無限、對偶、整體、步驟書寫、邏輯推理六個指標；學習態度有主動參與、驚奇感、想像、自由感知、自由思考五個指標。以確認課程的品質、教學的成效及學生的狀態是否合乎預期目標，又該做出哪些方面的修正。

伍、結語

學生可以從感知與思考的交織經驗中做到自由的學習，老師引導學生能觀察著自己的思考，思考著自己的思考，開放感知，讓圖像於內在靈魂中流動，想像著抽象關係的變化，運用自身過去的經驗，推理出屬於自己又符合邏輯的結論，透過意志、情感與思考讓美感經驗平衡發展。華德福教育培養 14-21 歲的青少年追求「真」，讓學生有勇氣，敢真實的呈現自我樣貌；敢自由的追求真理，敢向世界依循自己的判斷，找出屬於自己的答案。

歐氏幾何將有限世界的幾何概念，在無曲率平面的前提下做出全面性的統整，同時還存在著球面幾何，可以探索不同立基點下的幾何概念。到了十七世紀，笛卡爾的解析幾何與笛沙格的投影幾何又分別將歐氏在不同方面做出進一步的推展，擴大了幾何的視野，多了更深一層次的思考空間。到了近代，甚至可以否定歐氏幾何中的第五公設，讓想像的空間更加自由奔放，創造出非歐幾何。在幾何的發展過程中，多位學者為我們示範著，他們在自己過往的經驗中，用最自由

的姿態去尋找事物的本質，不被任何因素所束縛，觀察、思考著自己的思考，以全新的認知重新認識來到眼前表象間的關係。雖然人們總是用舊有的觀念來學習新事物，但他們以自由的姿態，想像全新觀點來挑戰過往，遇見任何現象，先從感受出發，保持內心處在寧靜的狀態做客觀的觀察，檢視內在產生的獨特感受，對每一個現象保有好奇，讓自己在想像的世界中搭起抽象與現實之間的連結，以自由想像的姿態，尋找到解決之鑰，才會產生多種不同立基點下卻同時符合嚴謹邏輯推理而形成的各種幾何學。而本文僅就投影幾何做出粗略的介紹，透過學習不同的幾何，可以解放我們想像力，讓自己內在的靈魂得以自由。

在學習數學的過程中，一定會產生疑惑，遇到挫折時，可能因此失眠，無助的柔爛好幾張紙，陷入徬徨的痛苦之中，卻願意持續投入其中，嘗試理解，想像可能關係的存在，享受在偶然出現的靈光中，驚嘆獲得靈感湧現的那一瞬間，嘆服法則定律背後神奇的一致性，不斷重複痛苦、欣喜、挫折、振奮、懷疑、篤定...等，種種正向與負向的情緒，卻也因此更加清晰地理解之間的關係。對於高中生而言，他們開始追求「真」，此時的重點是良知意識的培養，引領他們走在真實、真理和自由的追求道路上，向世界使用自己的判斷，找出屬於自己的答案，形成自己最真實、最自由的美感經驗。以自由感知為基礎，經驗世界存有的美，以自由想像擴展視野，進而自由思考般的深入探索，輔以邏輯推理小心求證，做出自由的判斷，找出世界之中的真與純淨。

綜上所述，提出三點建議給教育相關工作者：(1)兼顧邏輯演繹、自由想像的數學素養。(2)課程綱要納入投影幾何。(3)文獻探討：建立投影幾何的豐富中文資料。

參考文獻

- 王俊（譯）（2017）。**自由的哲學**（Rudolf Steiner原著，1894年出版）。宜蘭縣冬山鄉：財團法人人智學教育基金會。
- 何畫瑰（譯）（2012）。**認識更高層的世界**（Rudolf Steiner原著）。新北市：光佑文化。
- 李心儀、劉雲英、謝叔樺（合譯）（2005）。**讓孩子與數學真實相遇**（Ron Jarman原著，1998年出版）。臺北市：洪葉文化。
- 李文林、鄒建成、胥鳴傳（譯）（2004）。**數學史通論**（Victor J.Katz原著，1998年出版）。高等教育出版社。

- 林琦珊（譯）（2013）。**實用教學指引**（Rudolf Steiner原著）。臺北市：洪葉文化。
- 芮虎、李澤武、廖玉儀（譯）（2014）。**作為教育學基礎的人的普遍智識**（Rudolf Steiner原著）。宜蘭縣冬山鄉：財團法人人智學教育基金會。
- 孫愛萍（譯）（2016）。**教學中的平衡**（Rudolf Steiner原著）。華德福生活館。
- 袁媛、魏敏媛、陳順吉、單維彰（2015）。高中數學教師對99高中數學課程綱要變革的意見調查。**教育科學期刊**，14(2)。
- 教育部（2001）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。
- 教育部（2018）。**教育部美感教育中長程計畫第二期五年計畫（108-112年）**。
- 陳玟樺（2019）。民國57年國中暫行課程標準數學教科書之初探（1968-1971）（上）。**數學傳播季刊**，43(3)。中央研究院 數學研究所。
- 陳玟樺（2019）。民國57年國中暫行課程標準數學教科書之初探（1968-1971）（下）。**數學傳播季刊**，43(4)。中央研究院 數學研究所。
- 鄧麗君、廖玉儀（譯）（2007）。**邁向健康的教育**（Michaela Glockler; Stefan Langhammer; Christof Wiechert原著，2006年出版）。宜蘭縣冬山鄉：人智學教育基金會，歌德館醫學部門和教育部門。
- 鄭章華、吳思慧、曾志華、陳玟樺、廖惠儀、蔡政樺（2018）。**中小學數學課程發展史（上冊）**。新北市：國家教育研究院。
- 鄭章華、吳思慧、曾志華、陳玟樺、廖惠儀、蔡政樺（2018）。**中小學數學課程發展史（下冊）**。新北市：國家教育研究院。
- Barton, M. (Translated)(2019). Compiled and edited by Edward de Boer. *Imagination enhancing the powers of thinking*. 4Edge Ltd., Essex.
- Baum, P., Gorg, K. F., Hanson, U., Hünig, M., Labudde, K., Rosbigalle, R., & Sigler, S. ; Neumann, R. (2014). *Topics in mathematics*. Waldorf Publications.
- Dirnböck, H., & Stache, H. (1997), *The Development of the Oloid*, 1(2), 105-118.

- Field, J. V., & Gray, J. J. (1987), *The geometrical work of Girard Desargues*. Springer-Verlag New York Lnc.

