

使用軟體輔助數學教學之省思

李韶瀛

國立臺東專科學校通識教育中心助理教授

一、前言

教學上，筆者會想用一些輔助的方式來進行數學教學，如教具模型、軟體、遊戲等，這些都可以起到很好的作用效果，端看教師如何設計使用。筆者於本文分享軟體的教學使用對於學生所帶來的優點，同時也有一些反思。

二、常見的數學軟體分類

常見的數學軟體分類可以按照其主要功能和用途來分類。以下是筆者整理自「生成型預訓練變換模型（Chat Generative Pre-trained Transformer, ChatGPT）」（OpenAI, 2023）的分類（軟體功能並非侷限於分類，有時會跨越其他分類）：

1. 計算器軟體：此類軟體提供基本的數學計算功能，如加法、減法、乘法、除法、平方根等。它們通常用於解決日常生活和簡單的數學問題，包括手機、電腦和在線計算器等。
2. 符號計算軟體：此類軟體主要用於進行符號計算，包括代數表達式的簡化、方程式求解、微積分簡化等。例如 Mathematica、Maxima、SageMath、MATLAB、Maple 等。
3. 動態幾何軟件：此類軟件允許用戶創建、探索和操作幾何圖形。它們提供了互動式和動態的幾何學習環境，適用於初學者和中級幾何學習者。例如 GeoGebra、Cabri Geometry 和 Cinderella 等。
4. 統計和數據分析軟體：此類軟體專注於統計學和數據分析，提供統計計算、圖表繪製、數據可視化和概率分布等功能。常見的統計和數據分析軟體包括 SPSS、R、Excel 和 Python 的數據分析庫等。
5. 教學輔助軟體：此類用於輔助教學的軟體設計，包括課堂講授、學習資源和練習題等。例如 Khan Academy、Mathway、Microsoft Math Solver、Desmos、Photomath、ChatGPT 等。
6. 數學遊戲和學習應用：此類應用程序以遊戲化和互動的方式幫助學生學習數學概念和技能。例如 DragonBox 系列、Prodigy、Mathletics、Math Bingo、Quick Math Jr.等。

7. 教育學習平台：此類平台提供數學課程、練習題、教學資源和學習社群等功能，適用於中學生和大學生的數學學習。常見的教育學習平台包括因材網、均一平台、Khan Academy、Coursera、edX 等。

前述的分類方式主要是針對英文與中文的使用者，針對不同語言的數學軟體尚有許多，在此不予以羅列。

三、免費的數學軟體

當然這樣的分類並非唯一，吾人也可以使用免費與否，或者是針對使用者的特性來分類。摒除一些專業軟體，例如：Mathematica、Maple、MATLAB、mathCARD 雖然功能強大，但是屬於專業人員使用的軟體，而且軟體費用並不便宜，通常在大學與研究所階段較常使用。中小學數學教學也免不了使用一些數學軟體，礙於經費，可以從免費軟體考慮使用。目前免費軟體舉例如下：

1. GeoGebra：GeoGebra 是一款免費的數學軟體，提供了幾何、代數、微積分和統計學的工具。它適用於學生、教師和數學愛好者，可用於可視覺化數學概念、探索數學關係和解決問題。
2. Desmos：Desmos 是一款免費的在線數學工具，它提供了圖形相似性、函數相似性、數據可視覺化和幾何工具等。它具有簡潔的數學界面，適合學生進行數學學習和練習。
3. SageMath：SageMath 是一款免費的開源軟體，提供了廣泛的數學功能，包括代數、數學、數值計算、圖論等。它適用於高階數學研究和教學，可以在多個平台上運行。
4. Maxima：Maxima 是一款免費的計算機代數系統，適用於符號計算、數值計算和繪圖。它提供了強大的數學函數和算法，可用於解方程、微分、積分等數學運算。
5. Octave：Octave 是一款免費的數值計算軟體，類似於 MATLAB。它提供了矩陣操作、數值計算、繪圖和數據分析等功能，適合進行科學計算和數學建模。
6. Mathway：Mathway 是一款在線數學問題解答器，可以解決各種數學領域的問題，包括解決代數、幾何、微積分等。它可以幫助學生驗證答案、解決問題，並提供詳細的解題步驟。

7. Photomath：Photomath 被稱為「相機計算器」的移動應用程序，它利用手機的相機來識別數學方程式，並在螢幕上顯示逐步解題計算過程，對於學生解決數學題和複習概念有幫助。

由上可以看出，免費軟體的功能強大，從基礎的數學計算、微積分到高階數學研究等皆有，受限於語言能力與搜尋範圍，許多軟體不免大同小異，筆者也從中挑選了 GeoGebra，從英文版就一直作為數學教學課堂使用，採用的理由主要在於其操作介面容易上手，而且代數與幾何同時呈現的，非常有助於理解內容。此外，學生也會自行使用 Photomath，用以克服解題方面的困難。

四、GeoGebra 軟體的教學使用

GeoGebra 是 2001 年由 Markus Hohenwarter 在奧地利薩爾茨堡大學（University of Salzburg）製作，該名稱是 Geometry（幾何）和 Algebra（代數）的混成詞（維基百科，2023）。Mayer（2021）認為學生學習若只限於靜態的文字閱讀與教師講解、敘述，常使學生不易理解或感受所要傳達內容。此一軟體提供了豐富的學習資源和互動性，適用於中小學生學習數學知識和技能。教師透過它，可以直觀、有趣和互動的方式幫助學生學習數學。

筆者針對 16~17 歲專科學生所進行的教學活動透過 GeoGebra 使用到的部分，例如，三角函數的介紹，以及函數圖形的繪圖與觀察等，這些教學內容若能透過電腦軟體的協助，如 GeoGebra 等，可以更有效傳遞教學，並增進學生對數學內容的理解。簡述如下：

（一）三角函數的介紹

如圖 1，於單位圓當中，弦（通過點 C、點 E）或切線（通過點 B、點 F 的切線）及通過圓心（點 A）的直線，所產生的各個線段分別代表了六個三角函數值（ $\theta = \angle CAE$ ）： $\sin\theta = \overline{CE}$ ， $\cos\theta = \overline{AE}$ ， $\tan\theta = \overline{BG}$ ， $\cot\theta = \overline{FH}$ ， $\sec\theta = \overline{AG}$ ， $\csc\theta = \overline{AH}$ 。這些線段（ \overline{CE} ， \overline{AE} ， \overline{BG} ， \overline{FH} ， \overline{AG} ， \overline{AH} ）會隨著 C 點在圓周上的移動而整體連動改變大小。

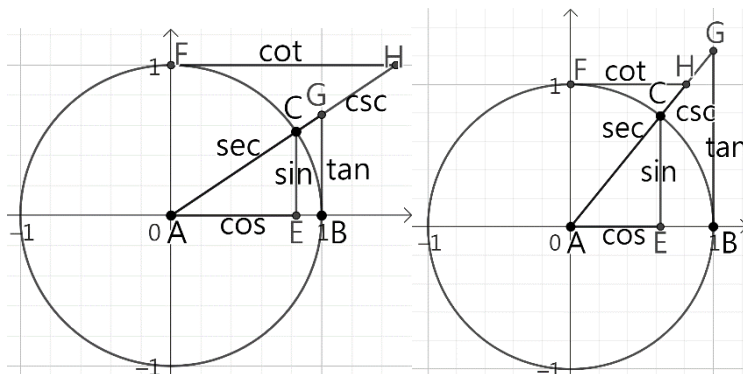


圖 1 定義三角函數及各函數值隨角度 $\angle CAE$ 改變而改變
資料來源：作者於 GeoGebra 自行繪製

(二) 函數圖形的繪圖與觀察

如圖 2，繪製了對數與指數的函數圖形。教師帶領學生觀察對數函數圖形必經過 $(1,0)$ ，指數函數圖形必經過 $(0,1)$ ；對數函數圖形與指數函數圖形對稱 $y = x$ 情形；GeoGebra 可以放大圖形和坐標軸的間隙，體會漸進線的概念等。

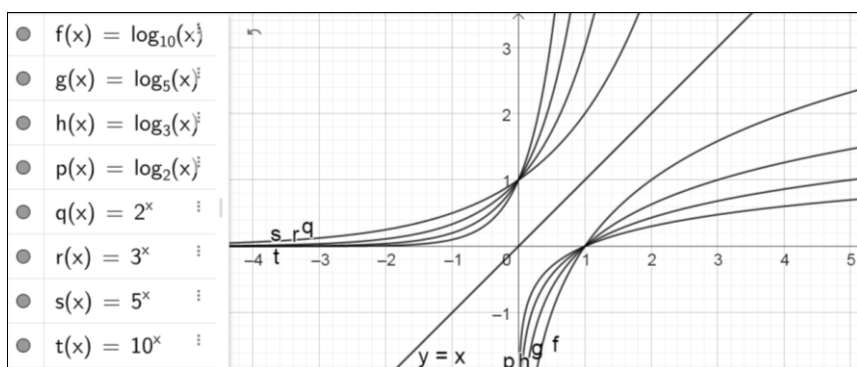


圖 2 函數圖形的特徵

資料來源：作者於 GeoGebra 自行繪製

如此的教學不單是教師演示 GeoGebra 內容和操作，學生同時也跟著做。由於此一軟體的持續改良，十幾年來，它已經可以在手機、平板、電腦上皆可以操作。不過，由於手機畫面較小的關係，會顯得較不好點選或拉滑等動作。

五、軟體使用的優點與應注意事項

當然，任何軟體的使用也不全然就是十全十美，端看教學者如何做最大的發揮，同時，將缺點極小化並注意其限制。

(一) 軟體所呈現的優點

1. 減輕學生計算負荷：學生可以透過軟體的輔助，看見圖形與函數值的變化。例如：從 GeoGebra 操作當中，可見三角函數值會隨不同角度而變化，若是沒

有可見圖形與同時看見六個函數值的變化，所產生的概念理解一定會較為不完整並且不易理解其間關係。

2. 透過軟體的輔助增加教師繪圖的準確度與教學便利性：有些數學老師會攜帶大型三角板、圓規等於黑板繪圖，若增加軟體輔助，則精確度大，同時也可以調整圖形大小與畫面縮放。
3. 教師可以透過軟體的輔助，協助數學概念表徵：例如圖 2 中的漸進線通常是以抽象的話語解釋，但是，從 GeoGebra 操作當中，可以透過軟體局部放大圖形，讓學生看到「實際的函數圖形真的是越來越接近而未碰觸到坐標軸」。
4. 增加學生自信心：教師可以帶領學生一起操作，增加學生的使用自信心。就以圖 1 中的三角函數的定義為例，從 GeoGebra 操作當中，學生對圖形會很有感覺，有感覺才是學習與理解數學的要素。

(二) 軟體使用應注意事項

1. 數學教學的設計並非只著重於軟體的使用，應該還是要回歸到如何教學使學生易於理解教學內容中的數學概念。因此，教學現場應注意面向很多，誠如根據 Shulman（1987）的研究發現，影響教學成功的因素不只是學科知識，還包括教師個人瞭解學生先備知識與學習困難、教學方法與策略、課程知識、教育情境、教育目標、價值與信念等，尤其是如何增進教師學科教學知能（Pedagogical Content Knowledge, PCK）更是重要。
2. 驟然全課程內容的改變是沒有必要的，教師可以從局部教學困點開始逐步改善。軟體不是萬能的，它是一種教學策略與工具，在於彌補不易呈現的概念或規律，藉以減少學生學習阻力。
3. 軟體的使用常考驗教師課程設計或教學策略使用能力。從選擇軟體與使用軟體，到教學上的運用，是需要一步一步的克服，但是絕非為使用軟體而使用軟體，教師教學前還是要事先評估其效果。
4. 目前軟體的操作還是需要教師下一番功夫的，期待更新版本輔助教學軟體出現，便利教師教學使用。

六、結語

對於數學教學輔助軟體的使用數學教師們或許會有以下想法或者其他，端視

教師的教學決定：

1. 不使用軟體輔助教學的看法認為，人類有歷史以來，數學知識的傳承在數學軟體發明使用前也持續進行，而且也都很順利，一代傳承一代，同時我們也都是這樣一路學習上來的，似乎也沒有必要非使用軟體輔助教學不可。
2. 軟體的使用或許有其必要性，但是牽涉到要有設備與軟體的建置，這個部分需要經費，同時教師也需要學習如何操作與設計使用，如此準備成本考量下，實際使用率會打折扣。
3. 認為有使用軟體進行教學的必要，就像「四色定理（four color theorem）」的證明是首個主要藉助電腦證明的定理，此也獲得數學界的部分支持。因此，從長遠來看，數學教學需要使用輔助軟體，使學生能適應與應用。
4. 將軟體視為教具的一種，評估其是否是達成教學目標的好工具而決定使用與否。顯然這個前提是教師對軟體的使用是熟悉的，而非陌生。

筆者使用軟體進行學習落後學生的教學結果，感受到對於學生是有幫助的，同時軟體所產生的協助學習探究效果，對於所有的學生也同樣是有正面助益的，就像專家學者與研究生常使用的 Mathematica 和 Matlab 一樣，有助於自身數學專業資料的分析。不過，因為軟體數量眾多，教師使用各有所好，目前看起來 GeoGebra 是大宗，應該是與其免費並且易於操作的介面和完整功能有關係。當然，在設計方面，筆者也偶有遇到瓶頸，幸賴可以透過網路搜尋或發問解決。最後，還是希望教師回歸教學設計，以如何教好學生數學概念來思考，若有其他更好的教具可以使用的話，也應當使用，而非只是為了使用軟體而使用軟體。

參考文獻

- GeoGebra。(2023年7月11日)。[維基百科](https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=GeoGebra&oldid=77644828)。取自 <https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=GeoGebra&oldid=77644828>
- Mayer, R. E. (2021). *Multimedia Learning*(3rd ed). Cambridge University Press.
- OpenAI. (2023). *ChatGPT* (Jul 8 version) [Large language model]. Retrieved from <https://chat.openai.com>
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.