

數學識能評量初探—以 7 年級分數主題為例

陳玉芬

國立中央大學學習與教學研究所博士候選人

單維彰

國立中央大學師資培育中心與數學系教授

臺灣教育評論學會會員

一、背景與目的

十二年國民基本教育總綱的理想願景，在於培育「核心素養」所應具備的知識、技能與態度。呂秀蓮（2017）歸納「核心素養」的學習目標有三：(1) 大概念的掌握和正向價值觀的建構、(2) 關鍵知識和技能的習得，以及 (3) 與主題相關值得學習的內容之理解；十二年國教總綱則強調「核心素養」的學習不宜以學科知識及技能為限，而應關注學習與生活的結合，透過實踐力行而彰顯學習者的全人發展。為了將前述理念轉化為「日常的具體化教學目標」之指引，單維彰（2018）建議以「知、行、識」作為數學領域的課程設計參考架構。知、行就是「知道」和「能做」兩個向度，在教學層面上，知指學習內容，而行是操作技能，識的意思則比較微妙，是關於理解和連結的後設認知，以及對其價值的認同。意即在編撰教材和設計教案的時候，有意識地為每一項學習內容設置「知、行、識」三方面的教學目標；而在教學後反省是否妥適安排了屬於「知、行、識」的教學活動？作者認為：如果能夠兼顧這三方面的目標，則比較容易達成「核心素養」的願景；前述學習目標之 (1)、(2) 傾向屬於「知、行」向度，而 (3) 則近似「識」之課程向度，可望用來達成「態度」之素養願景。

然而評量是課程不可分割之一部分，「不但反應學生的學習成果，也會影響到學生未來發展的公平性與合宜性」（方志華、葉興華，2017）。適當的素養導向評量可落實課綱目標的達成，它也成為各界關心 108 課綱的一個議題，例如本刊亦早在 2017 年即以「國民中小學核心素養如何評鑑」為評論主題。就數學領域而言，「知、行」是經常被評量的向度，也已經有豐富的評量經驗，故本文欲聚焦於「識」之向度，即對於知識的理解、連結、詮釋的評量，稱之為「識能評量」。唯因「識」之學習內容與表現並不能獨立於「知、行」之外，故下文不免略微涉及「知」與「行」。

以下，作者先解釋選取 7 年級「分數」課題作為範例的理由，簡述分數課程的設計理念，然後藉以提出數學識能評量的規準建議。

二、七年級「分數」課程分析

呂秀蓮（2017）認為：欲「進入素養的評量，教師必須脫離教科書的挾制」，不再以教科書作為課程的目標，將課程理解為針對學生需求而達成課程綱要的過

程。依此看法，研究者指認剛升上 7 年級學生的關鍵需求之一是分數運算。考察 108 數學領域課程綱要（簡稱數學領綱）可知：分數主題最後一次出現於 7 年級 N-7-3：「負數與數的四則混合運算（含分數、小數）」，此時的分數教學融入有理數的混合運算。課綱雖然沒有指定此內容的教學順序，但按照 7 年級的其他內容需求，有理數運算理應安排在前。於是，正負分數運算成為 7 年級學生必須及早掌握的關鍵能力之一。在 N-7-3 指標之後，數學課程再也不提分數，亦即學生若不在此時確實掌握分數運算，則在數學課程中再也沒有下一次學習機會。

分析正負分數運算之所需，在正確處理正負性之後，實際要做的是兩個正分數的加、減（大減小）、乘、除，其中「大減小」的前置能力是正分數的比較。這些課題確屬小學階段，歷經 2 年級的認識單位分數（N-2-10）、3 年級同母分數比較與加減（N-3-9）、4 年級假／帶分數之轉換與等值分數（N-4-5,6）並藉數線理解分數是「數」（N-4-8）、5 年級擴／約分與異母分數之比較與加減乘（N-5-4,5）並初步引入分數除以整數（N-5-7），最後在 6 年級學習分數除法（N-6-3）。課綱在小學階段設計的（正）分數課程可謂細緻且完整。

從課綱的關鍵詞即可提取前述「素養學習目標」的大概念、關鍵知識與技能等項目，也就是課程架構中的「知、行」向度，至於那些主題之間的關係與理解，也就是「識」，則不在課綱文件裡，需要教師與教科書作者予以研究。

7 年級數學教科書依照課綱僅處理正負性而不再教導分數運算，但作者的實際經驗顯示：相當數量的 7 年級學生有再學習分數運算的需求；實際需求數量或比例屬另一研究議題，本文不究。因此，在「素養導向」的課程理念之下，國中教師須自擬合適的分數運算教學與評量。

在前述需求的驅動下，作者自編「數學識讀文本」，在 6 節彈性課程中（每週一節）實施以閱讀為主的教學活動，提供 7 年級學生綜合複習（正）分數運算的機會，並補充小學階段可能未及的「識」之向度。綜觀大概念與關鍵技能，文本設計的「知」目標包括單位分數、真分數、假分數、帶分數、等值分數之認識，在數線上指認分數的位置等，「行」目標包括分數形式的轉換、比較與四則運算之執行；「行」，不僅有操作程序的教學，亦應搭配著典型應用（Schneider & Stern, 2010）。而「識」的意思就是關於理解和連結的後設認知，以及對其價值的認同，包括理解分數是「數」、理解分數比較為何有逆序關係、理解分數為何有不同形式以及它們各自的用途、理解並賞識分數算則。

本文不宜細談識讀文本，僅扼要指出文本的設計緊扣著單位分數，一致以單位分數串起分數教學的脈絡。例如以連續量（長度）的包含除作為除法的典型概念，從除以整數（例如：將 10 尺之長每 2 尺切一段的算式是 $10 \div 2$ ）類比至除

以單位分數（例如將 10 尺之長每 $\frac{1}{2}$ 尺切一段的算式是 $10 \div \frac{1}{2}$ ），而分數乘法則引導為單位分數相乘的倍數（整數倍），後者以單位正方形的切割為典型概念，例如圖 1 呈現 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ 的概念心像。

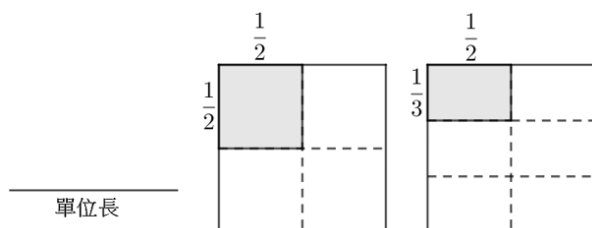


圖 1 由單位正方形邊上的等分割理解單位分數乘法的意涵之一

三、數學識能評量規準

為測量素養導向數學課程的實施成效，本文依據數學領綱以及國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心（簡稱心測中心）開發的「標準本位評量」分類，發展數學素養評量規準。因為本文欲採用「知行識」課程架構，但是審定教科書並沒有宣布「識」向度教學目標，所以作者採用自編「識讀文本」之分數單元為例，輔助說明此評量規準。因為「識」相對於「知、行」是素養導向課程與相對課程理念（例如學科導向）的關鍵差別，所以稱之為識能評量規準。

「標準本位評量」係指以學習者的學習成果對照於事先訂定的評量標準，以瞭解學習者在該領域素養中達到的狀態（心測中心，2021），藉此反映素養教育的重要參考指標。此評量架構的內容包含主題、次主題與表現描述，即期望學生學到哪些內容及做到什麼程度。主題與次主題呈現學到哪些內容，A-E 五表現等級則描述做到什麼程度，如圖 2。其中 C 等級所謂的「基本」是指「若學不會，會影響國中三年的學習」，而 D 等級的「簡易」是指「C 等級的先備知識」。

作者根據心測中心的評量規準，做成「數學識能評量」各等級表現描述，圖 3 以 7 年級分數主題的（正）分數乘法次主題為例，試描述各等級的表現。圖 3

之 D 等級 $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2$ 在教學脈絡（識讀文本）中的意義並非乘法算則，而是藉由

數線上的測量意義，理解分數 $\frac{2}{3}$ 的意義。所以，就此課程而言，雖然 D 等級並

非 C 等級的直接先備知識，但 D 等級確為將 C 等級應用於 B 等級所需的先備知識，也就是此項「次主題」的先備知識，故作者認為它仍符合心測中心的 D 等級定義。


主題	次主題	A	B	C	D	E
		能分析問題，利用所學數學知識與能力，提出支持性的理由。	1. 能延伸、應用基本的概念。2. 能應用所學數學知識與能力解決問題。	1. 能理解基本的數學概念。2. 能作基本的數學運算。	1. 能認識簡易的數學概念。2. 能作簡易的數學運算。	未達D級

主題、次主題：
學到哪些內容

A-E 等級表現描述：
做到什麼程度

圖 2 國民中學數學領域標準本位評量各等級表現描述通則

資料來源：心測中心，2021，頁 18。

主題	次主題	A	B	C	D
7年級 分數運算	正分數 的乘法 運算	能陳述並解釋一般分數乘法算則的理由，能欣賞單位分數對於簡化概念的幫助。	能作一般分數乘法，能應用分數乘法解決問題。	能理解單位分數乘法的面積意義。	能理解一般分數是單位分數的整數倍。
		能使用口語或文字或圖形表達支持自己的論點。	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ $= (\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}) \times (2 \times 4)$ $= \frac{8}{15}$	可以理解 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$ 在面積中代表的意義。 	$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2$

主題、次主題：
學到哪些內容

「識」的
表現等級 A

「行、識」的
表現等級 B

「知、行」
的表現等級 C

「知」
的表現等級 D

圖 3 數學識能評量各等級表現描述示例

為了實踐「知行識」課程架構的評量工具，作者必須將綜合性的評量規準，進一步分析出知、行、識向度的評量。因為各向度的評量又必須對應適當的表現等級，故需要拆分各向度的評量目標。作者持續以正分數乘法之次主題為例，依實際需要將「知行識」三向度的評量目標細分兩級，標示為知 1、知 2、行 1、行 2 與識 1、識 2，各項目所屬的表現等級與描述如圖 3 所示，而評量規準與說明則列於表 1。

表 1 數學識能評量各向度目標、等級與規準說明示例

向度	等級	規準說明
知 1	D	知道一般（正）分數都是單位分數的倍數（整數倍）。例如 $\frac{3}{5}$ 是 3 個 $\frac{1}{5}$ ，視情況可記作 $\frac{1}{5} \times 3$ 或 $3 \times \frac{1}{5}$ 。
知 2	C	知道單位正方形的面積為 1（平方單位），將它切割成 n 個（彼此全等的）矩形之後，每個矩形的面積為 $\frac{1}{n}$ （平方單位）。知道單位分數相乘的意義之一是面積，也知道交換相乘的順序仍是同樣的面積，例如 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$ 。

行 1	C	能作單位分數的乘法計算，例如 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ 。
行 2	B	能作一般正分數的乘法計算，例如 $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ 。學生能運用交換律即可，不必刻意評量交換律。能用分數乘法解決典型的應用問題，例如求邊長為 $3\frac{1}{2}$ 和 $1\frac{3}{4}$ 英吋的長方形面積。（假設帶分數轉換的學習已經穩固。）
識 1	B	能將較不常見或需要多步驟的問題轉換為關於分數相乘的數學模型，例如將 10 張 3 吋長的便條紙黏接成一長條，每兩張之間的重疊黏貼處是 $\frac{1}{4}$ 吋，總共有多長？（只有列式或轉換為數學模型的思維屬於此項。）
識 2	A	能解釋分數乘法算則的理由，能解釋為何分數相乘的順序不影響結果（不必強調「交換律」這個術語，也不限定使用單位分數）。能欣賞單位分數為發展分數乘法之概念與算則所提供的幫助。

以上僅為針對「7 年級分數運算」主題所舉的例子，一般而言，知、行、識所對應的表現等級不一定是從低到高，各向度也不一定要對應恰好兩個表現等級。原則上，數學素養課程架構所建議的「知」是指學習內容，亦即「是什麼」或「學什麼」的課程目標，側重於能夠從記憶中提取，在認知上能夠指認；「行」是「怎麼做」或者「做什麼」的課程目標，指的是學生所展現出來的數學能力，包括程序執行、解題、溝通、論證等等；至於「識」則是關於理解和連結的後設認知，以及對其價值的認同，建議理解成「為什麼會這樣」、「為什麼選擇這樣做」、「怎麼發展成這樣」之類的課程目標。

四、結語

本文採用心測中心標準本位評量之表現等級作為一個維度，數學素養課程建議架構（知、行、識）作為另一個維度，提出數學素養評量的二維架構設計，稱之為「數學識能評量」，並以 7 年級分數運算主題為例，舉例說明此評量架構的規準設計方法，盼能為數學素養評量做出一點貢獻。文中提及 7 年級學生未達成小學階段分數學習目標之現象，其人數比例、程度範圍、適當之補救或銜接課程等議題，均有待更深入的研究。而作者以「識讀文本」提供數學課外（彈性課程）補充教學的實徵成效，也有待考核。「識讀文本」尚未定稿，但部分內容已開放（作者，2022），歡迎教育同仁參考與指教。

參考文獻

- 方志華、葉興華（2017）。主編序。臺灣教育評論月刊，6(3)，iii。
- 呂秀蓮（2017）。十二年國教107課綱核心素養的評量。臺灣教育評論月刊，6(3)，1-6。
- 單維彰（2018）。論知行識作為素養培育的課程架構—以數學為例。臺灣教育評論月刊，7(2)，101-106。
- 單維彰（2022）。國中數學別冊。取自 <http://shann.idv.tw/middle>
- 國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心（2021）。十二年國教課綱國民中學標準本位評量示例彙編：數學領域。臺北市：作者。取自 <https://sbasa.rcpet.edu.tw/SBASA/documents/Math.pdf?20200805>
- Schneider, M. & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: a multimethod approach. *Dev Psychol*, 46, 178-192. doi: 10.1037/a0016701

