

中小學數學課綱演化方向芻議－學習內容

單維彰

國立中央大學師資培育中心、數學系與文學院學士班教授

臺灣教育評論學會會員

本文希望為十二年國教數學領域課程綱要修訂與發展的大方向，提供作者基於經驗與思考的建議；本文專注於學習內容與表現，而不涉及課程的政策與實施層面。作者認為 108 課綱的前導研究（林福來、單維彰、李源順、鄭章華，2013）發揮了非常具體的成效，所以特別希望本刊「中小學課綱修訂的展望」的發行，能引起更多同仁的關注，而能以更長的時間投入前導性質的課綱研究。

作者本著十二年一貫的精神思考數學課程，但為行文方便，以下仍粗分為小學、國中、高中三節。本文的提議希望推動演化的方向，在同仁的討論與研究中逐漸改變，並不希望發生急速的變革。最後，因為篇幅限制，以及本文乃為粗略建議之性質，故不詳列參考文獻與國際教科書。

一、小學數學課程

以前小學是一個獨立的教育階段，現在以十二年一貫的眼光重新檢視課綱，原本規畫在小學但是經常感到困難的課題，可以根據實證而考慮延後。但是課題不能一味延後，應通盤考其緩急，適度調整。

(一) 算術知難行易

單純從哲學眼光來看，孫文的「知難行易」學說確有值得參考之處。小學算術便有一些可能符合「知難行易」的例子，例如正整數的長除法算則，帶小數點的四則運算。近二十年的小學算術課程傾向於強調理解，作者基於以下三個理由，提請教育同仁更精緻地研究小學算術的理解層次。

1. 算術的程序看來簡單，並不可推論其原理也簡單。早年的算術教材只強調程序而不細說原理，或許表明那些原理並不簡單。我們可能低估了算術的理論深度。
2. 實際參與補救教學的同仁，都熟知教導小學生算術原理的困難¹，讀者可參考一冊分享理論與經驗的專書（呂文惠等，2022）。研究者看待這些證據的態度，通常是思考教材教法的改進，而不是考慮修訂課綱。如果某人在兒童時期不理解算術原理，並不表示他／她將來也不能理解；同理，降低小學階段的理

¹ 例如，要求學生從 的商 5 餘 2 推論 是不是商 500 和餘 200？又例如，在 的長除法過程中，算出商為 0.33 而餘的位置上寫著 1 時，實際的餘數是多少？

解層次，並不等於數學教育放棄了「理解」的教學目標，它可以延後。

3. 要求小學教師負起算術原理的教學責任，給教師同仁帶來壓力，也增加了小學階段師資培育的複雜度；這些壓力與複雜度是否必要？考量目前師資生的學習與就業情形，課綱宜有更務實的設計。

延伸而來另一個課程設計議題，就是分數與小數孰先孰後問題。研讀課程史（陳翊林，1930）和跨國比較（陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛，2005），可以看到兩者皆可：如果先教分數，則小數是分數的特例；如果先教小數，則分數是小數的推廣。考量算則的簡繁程度，以及生活經驗的親疏，小學課程可以考慮先熟悉小數。做分數課程的國際比較時，請留意英美比我們更常在生活中使用分數，特別是分母為 2、4、8 的分數。

有一種意見認為如果延後分數的教學，小學「教不完」分數的四則運算。作者對此有兩點意見。首先，目前的課程頗重視分數算則的「理解」，如果在初學之時能夠接受「知難行易」的哲學，或許可以減輕學生的負擔。其次，考察歷史可知，分數四則—特別是分數相除—的實際需求，是在解方程（包括比例式）的程序中出現的。如果課程想要讓學生先「學完」分數四則，然後才引進方程，可能錯失這兩個課題的自然的連結，而失去了學習上相輔相成的效果。此外，排除了方程的需求而單獨做分數四則，教材必須設計頗不自然的例子（*contrived examples*），這些例子脫離生活經驗，可能反而成為學習的障礙。過去，我們頗擔心數學式裡的英文字母 x 帶給學生的認知負荷，現在英文的學習年齡下降了，應該可以重新檢視前述命題。

（二）實體與圖形

小學階段並沒有真正的「幾何」，主要在學習指認基本的空間實體與平面圖形。人的感官經驗來自空間，平面反而是抽象的，小學的形體教學希望能緊扣實體的經驗，盡量讓兒童有實物操作的機會，而平面圖形的學習，建議以支持空間經驗的數學概念化為總目標。例如指認物體的表面是什麼平面圖形？想像物體的切片或剖面是什麼圖形？以及—最重要的一數學溝通：在平面上溝通空間中的實體或關係。

操作就要用工具，除了圓規以及（有刻度的）直尺以外，作者推薦一種附帶量角功能的直角板（由陳嘉皇教授介紹給作者），它還可以當直尺用。直角板可以執行許多基本的幾何操作，雖然它不能直接畫圓，但是它可以將一線段作為直徑，作圓周上的點；只要作五、六個點，就能幫助畫一個頗準確的半圓了。

另一項值得推廣的工具是角鋼（由古欣怡老師介紹給作者）：一段長約 5 公

分的直角角鋼零件，可以用來驗證凹的（如牆腳）和凸的（如桌邊）垂直平面。

關於空間形體的溝通，小學課程基本上只教了展開圖；平行視圖偶爾出現於試題，但經常像智力測驗而不像學習成效的評量。108 課綱引進了三視圖，放在 7 年級，其實它可能太晚也可能太淺，因為顧慮教師尚未有相關教學經驗而做此保守的設計。在此 3D 列印以及所謂「元宇宙」即將來臨的時代，數學課程最好能逐步加強空間形體或關係的溝通教學，並提供適當的教師賦能研習。它的重點不在於評量，而在於溝通。它並不僅是小學階段的內容，但是建議從小學開始而延伸到國中與高中。

與西方課程比較，我國小學課程顯著地缺少了坐標平面（陳宜良等，2005）。據說小學顧忌的並非坐標，而是負數。這個顧忌甚有道理，因為我國的教學習慣是：如果要教負數，就要把它「教完」。如果現在的小學教師本來就不熟悉負數計算，那麼在小學課程裡規劃只有描述而沒有推論（沒有計算）的坐標平面，或許是可行的設計。

想必有人問：那又何必刻意在小學置入坐標平面呢？原因有二。其一，如果將小學階段的某些「理解」型教學目標移去國中，勢必要將部份國中的基礎內容移到小學；我們必須如此思考課程，才能實踐十二年一貫（或者至少九年一貫）的教育理念。其二，作者提議歐氏幾何的定位（見後文）應為支持坐標幾何的學習，描述性的坐標平面（與負數）為國中階段備妥坐標幾何的舞台。如此設計，搭配小學階段降低的理解目標，應可大幅減輕 7 年級上學期的學習壓力。

（三）機率與列聯表

3 年級的列聯表、6 年級的可能性，是 108 課綱在小學階段新增／恢復的課題。在小學教師熟悉列聯表之後，希望未來的課程能在 4、5、6 年級伴隨學生的計算能力而擴增列聯表的實用性。當然，在國中與高中也要逐步發展這項工具；列聯表和樹狀圖，是中學階段亟待開發的解決問題工具。

作者懷疑算術原理的難度被低估了，卻也懷疑機率的難度被高估了。造成判斷失準的可能原因是我國處理機率的態度，過度形式（formality）而忽視直覺（intuition）。所謂形式包括樣本空間的集合意涵，以及機率的頻率詮釋（frequentist interpretation）。近年的實徵研究顯示 10 歲少年可能已有直觀機率概念，而且機率的貝氏詮釋（Bayesian interpretation）很可能更為自然。這些「可能性」在臺灣還沒有獲得足夠的開發。

就像平面坐標，並不是非要刻意在小學置入機率課題，而是機率思維確實是

當代社會（甚至也是當代物理）至關重要的思維模型，也是左右國民素養的關鍵因素，我們實在不能承擔普通國民缺乏機率概念所致的後果。如果在小學和國中階段的數學課程中，面臨幾何、代數、機率的取捨，作者寧願選機率（和統計）。

二、國中數學課程

國中承接國小的算術原理教學責任²，可以搭配代數教學，將算術原理當作代數的應用（例如將整數除法算則改寫為等式，亦即除法原理），相信國中教師都能輕鬆駕馭這項新課題，並不需要提供太多研習。類似於分數四則宜搭配方程的建議，作者也建議不必做太多正負混合計算的磨練（rote repetition），因為它們的需求來自化約聯立方程的消去法，在明顯需求之下做刻意練習（deliberate practice）的效果可能較好。最後，國中若只講次方而不談指數律，科學記號數字只作簡單整數倍與整數分，似可滿足國中生的需求而不至於造成額外壓力。

作者建議：國中階段主要的教學變革與教師賦能的需求，在於更為統整（integrated）的幾何課程，以及更為實用的機率與統計課程。

（一）坐標幾何

歐氏幾何不僅樹立了數學思維的典範，也樹立了數學的教學典範。可是，歐洲檢討這個典範，已經有兩百年以上的歷史（Legendre, 1794），再加上美國近五十年所做的檢討（NCTM, 1970），有豐富的文獻可循。作者建議國中階段的幾何教學總目標是坐標幾何的建立，歐氏幾何的角色，是為服務此目標之達成；而且，在國中階段，坐標幾何實際上也整合了代數的學習：直線方程式、線性聯立方程、比例式、正反比、一次函數、二次函數與方程。只有多項式的四則運算不涉坐標，這個課題在國中已經形同雞肋，不妨正式移去高中。

在坐標幾何的總目標之下，傳統課題的緩急可能有以下調整：長方形先於三角形，直角三角形先於一般三角形，垂直先於平行，相似先於全等。若將相似與全等概念限制在長方形和直角三角形上，可望大幅降低難度，卻不減其應用在坐標幾何上的威力；一般性的相似與全等，如果延到高中搭配正弦定理、餘弦定理一起學習，可能更有相得益彰之效。

² 例如，除了註腳 1 所列的問題以外，還可以了解為何 $25 \div 7$ 之商與餘可以讓 $\frac{25}{7}$ 轉換成 $3\frac{4}{7}$ ？再度確認分數與小數都是「數」，並了解長除法也是將分數轉換為等值小數的程序；稍後，了解分數皆可轉換為小數，但（無窮）小數未必可以轉換為分數。

無坐標的幾何主要保留給空間形體，以及進一步的空間概念－特別是線與面的垂直概念。空間幾何在國中與國小階段的差異，建議設定在計算：國小可以只計算長方體的體積與表面積，其他基本形體的相應計算則交給國中。這是因為華人善算，臺灣學生一方面愛算且能算，另一方面抽象思維尚待熟成，所以，與其勉強發展抽象的幾何推理，不如讓學生有實際可算的物件；更何況「算」是建立數學概念的最直接途徑³。

另一類可算的無坐標空間概念是基本的測量。108 課綱已經可使國中教師熟悉坡度的教學，未來可使坡度連結坐標平面上直線的斜率，而工具總有一天要成為數學工作的，三角比的正反查應視為理所當然的數據（仍須保持知難行易），於是測量的目標可以從長度擴及角度，而仰角與坡度是可轉換的一體之兩面。在隨手可用工具的前提下，需要實徵研究：國中學生能否認知直角三角形 ABC （其中 C 為直角）的三邊成固定比例 $1:\sin A:\sin B$ ？

（二）機率與統計

108 課綱安排在 9 年級的機率課程，可以論述其太晚、太淺，而且缺乏實用性，難以使學生「有感」於機率模型的威力。貝氏機率的價值已經被肯定，列聯表將是貝氏機率的自然夥伴。此外，樹狀圖的威力，可能因為課綱的限制而不能發揮出來，如果真是這樣就該考慮調整課綱。

中學階段的統計並無概念上的挑戰，教學成效主要是受到工具的限制。事實上，統計也是在桌上型機械計算機問世之後才開始普及。不久之後，可能一生將有一平板，希望數學課綱能掌握先機，搭配適當的教學 App 更新統計課程。

三、高中數學課程

技術型與普通型高中數學課程之排比與對應，屬教育政策層次的問題，本文不予評論。但原則上作者建議技高數學與普高脫勾，盡量務實發展支持其技學專業的數學，並且隨時掌握「知難行易」的哲學。

108 普高數學課綱的最大保留，是微積分的提前與空間向量的延後。跨國比較的證據已經明顯支持此變革（陳宜良等，2005），希望臺灣也能有相應的研究。108 課綱已經在 10 年級布置多項式微分的基礎，待全國教師熟悉此段課程之後，可協商下一步的演變。108 課綱也已經將二階方陣與平面向量的學習目標轉向線

³ 坐標幾何也提供可計算的物件，例如對稱於原點、 x 軸、 y 軸、 $y = x$ 直線的點坐標，繞原點順或逆時針方向旋轉 90 度，方程式以及函數圖形的平移；這些計算同時也可以鞏固坐標概念。

性代數的準備，希望未來繼續朝此方向邁進。108 課綱已經引進主觀機率，希望下一步能正式發展貝氏機率的詮釋，讓它至少與古典、頻率機率並重。而統計的教學受限於工具，期待數學的教學與評量（高中特別受受制於評量）終能接納工具。

108 普高數學課綱的待辦清單中，唯一完全無法顧及的是計算機的數學基礎。主要原因是課時不足，而課時屬於教育政策，領綱不談；另一個原因是期望科技領域能涵蓋這個主題。如果能讓多項式再延伸一點，就能涵蓋進制轉換；如果能讓集合再延伸一點，就能涵蓋邏輯運算與布林代數。如果能讓演算法再延伸一點，就能觸及運算思維。但是社會（大學）是否真的有此期待？教師需要多少增能？還有待探究。

四、結語

在招生時採計數學的大學科系變少了，這個現象有多少可以歸因於「社會的多元化」？又有多少該歸因於「數學教育不符合需要」呢？這應該是一個有量化方法可以研究的議題。其實，前述兩個因素可能並不獨立。不論如何，數學課綱無法左右社會的發展，但是我們可以盡力符應社會發展所產生的需求變化。

108 課綱規劃了前導研究，但它是臨時的短期任務；國教院有研究課綱的專任同仁，但他們形單影隻。希望《臺灣教育評論月刊》能引發大規模且常態性的課綱研究。108 課綱也曾組織跨領域對話，當時數學曾與自然和生活科技領域對話，該次經驗確實影響了課綱設計。但數學像語言一樣深入文化，未來希望能讓數學有機會與更多領域的課綱同仁對話。

參考文獻

- 呂文惠、龔心怡、李靜儀、林素微、吳慧敏、林原宏、羅廷瑛、謝佳叡、陳嘉皇、白雲霞、袁媛、曾建銘（2022）。**低成就學生的教與學：數學課室中的理念與實踐**。臺北市：五南。
- 林福來、單維彰、李源順、鄭章華（2013）。**十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究報告**。十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究，整合型研究子計畫三。新北市：國家教育研究院。
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛（2005）。**中小學數學科課程綱要評估與發展研究報告**。建置中小學一貫體系計畫。臺北市：教育部。

- 陳翊林（1930）。最近三十年中國教育史。上海市：太平洋書店。
- Legendre, A. M. (1794). *Éléments de géométrie*. Paris: F. Didot. Retrieved from <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5720354t.texteImage>
- NCTM (1970). *A history of mathematics education in the United States and Canada*. Washington, DC: The National Council of Teachers of Mathematics

