

## 專科學生實施探究導向課程解題歷程初探

李韶瀛

國立臺東專科學校通識教育中心助理教授

本研究以專科學校二專制一年級學生選修「數學推理與應用」探究導向課程之教學活動中，學生於期中、期末對 2 個非例行性問題的解題反應情形作分析，用以確認本課程對學生解題論述實施的效果。

### 一、課程設計理念

所謂「探究導向」是一種了解並理解數學以通過探索數學世界、提出問題、解決問題、檢驗猜想、驗證想法和闡明關係來獲得學習者現有的知識 (Catherine, Steven & Zahava, 2017)。由於本課程實施內容採用探究導向為主軸，因此參考 Catherine 等人 (2017) 所提出數學問題設計參考的原則，如下 (Catherine et al., 2017, p.77)：

1. 這是高認知要求的問題？它是否連結到其他數學想法？它是否產生新連結？
2. 它允許多種切入點？取向與呈現可以用多種方法？它是低門檻、高發展？
3. 它是有生產性的？它是開放性的？（非單一途徑、單一解法）
4. 它是思考啟發？它會使學生溝通和協調想法？
5. 它是真實的？對學生而言是真實的？它能提升學生每天生活經驗？它是有趣的？它重要嗎？它能幫助學生理解對學生或學生社群是重要的議題？

在探究導向課程實施方面，探究導向的教學原則有四：產生理解的學生方法、建立在學生的貢獻、發展分享的理解、連結標準的數學語言和符號根據 (George, Estrella, Karen, & Christine, 2018, p.4)。整體教學活動應該讓學生對學習有感，學生應做到六件事：解題 (solve problems)、臆測 (conjecture)、實驗 (experiment)、探究 (explore)、創造 (create)、溝通 (communicate) (Martha, 2017, p.272)。因此，學生在探究導向課程下，於解題論述方面，首先自身要對問題產生意義，展現出探究思考並紀錄或寫下解題內容，然後據此內容與他人溝通、分享，從過程中修正自己的想法與解題內容。所以，在本研究的教學活動當中，教師需時時鼓勵學生紀錄與表達思考，能夠與他人溝通自己的想法與解題內容。

## 二、課程實施實務

本課程為一學期課程，主要進行的單元有 7 個，依序為：河內塔、搶 30、硬幣翻面問題、商高定理、三角錐的分割、數的次方、卡片問題等。單元問題選用標準如同前述 Catherine 等人（2017）提出的五點原則。學生在完成問題解題後，以組為單位，派員上台發表，同時也接受各組的挑戰。單元活動進行之間，如果有空檔，會穿插國中程度的數學競賽題目。因為這些題目有難度，必須要思考與討論，藉以鍛鍊個人思考與團隊合作。

本課程上課流程以先個人思考紀錄、後分組討論的方式進行。首先，教師說明問題後，學生個人思考後作答並做成紀錄；然後，個人依據所書寫的作答內容與小組成員共同討論，並嘗試說明理由；最後，小組派出代表上台報告小組的共識。流程設計的用意，主要是讓每個學生都能先思考過，這樣才有內容進行小組討論。若是全班有一半以上的學生無法順利作答，教師會進行提示或直接教學。在小組形成共識階段的討論中是允許學生透過網路搜尋相關解答。但是，學生最後的呈現是要能自己解釋過程與理由。為使小組分工明確，主要規範了四個任務分工：(1)釐清問題？（問題在問什麼？有哪些簡化方法？）；(2)這個問題的相關知識或概念有哪些？(3)制定解題的方向。（或者針對簡化後的問題解答。）；(4)解題過程和結果可以說服別組嗎？小組當中的每個人至少要負責一個任務。

最後的評量標準強調學生參與度（包括出席討論、繳交作業、回饋小組等）與解題的內容過程（本文所聚焦之處），有正確答案但是無過程的話是拿不到分數的；假如過程部分正確、但答案是錯的，是可以依過程正確性得到部分分數的。

## 三、數學問題設計舉例

本研究中所進行的數學問題依據 Catherine 等人（2017）所提問題設計原則設計，並且確認選課學生並未曾接觸過這些問題。「河內塔」是學期的第一個活動，「卡片問題」是學期的最後一個活動。兩個問題解題內容蒐集分別來自期中考、期末考當中的個人解題內容。本課程選課人數 32 人。因期中考、期末考題數各 8 題，扣除未能同時作答該 2 題學生後，有 21 位學生解題內容可供分析。

### （一）河內塔

河內塔 64 片圓盤如圖 1，全部移完總共至少需要幾個步驟？請說明理由。  
（移動規則：小圓盤在大圓盤上、一次只能移動一個圓盤）

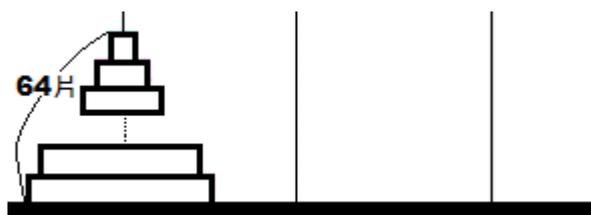


圖 1 河內塔

## (二) 卡片問題

如圖 2，對方於心中選定 1~63 當中任何一數，只需告知該數是否出現在卡片問題中的哪幾張，依此便能猜出對方心中所想數字。(1)請解釋這六張卡片的設計原理；(2)若以三進位的方式，能否比照設計出可猜出數字的卡片？

卡片一	1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59 61 63
卡片二	2 3 6 7 10 11 14 15 18 19 22 23 26 27 30 31 34 35 38 39 42 43 46 47 50 51 54 55 58 59 62 63
卡片三	4 5 6 7 12 13 14 15 20 21 22 23 28 29 30 31 36 37 38 39 44 45 46 47 52 53 54 55 60 61 62 63
卡片四	8 9 10 11 12 13 14 15 24 25 26 27 28 29 30 31 40 41 42 43 44 45 46 47 56 57 58 59 60 61 62 63
卡片五	16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63
卡片六	32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63

圖 2 六張卡片

## 四、學生解題分析

採用期中考、期末考的答題內容，主要是學生之前的上課學習已經歷個人思考與小組討論，真正的理解與收穫在此比較可以明確看出，唯受限於作答時間 2 節課與問題數量，學生可能無法盡情完整回答。由於兩個問題一個在學期初、一個在學期末，因此，學生在這兩個問題上作答內容的差異性可視為教學產生的效果影響。

學生個人期中考「河內塔」答題內容摘要如表 1。學生學期末「卡片問題」答題內容摘要如表 2。「類別」的項目由「抄襲」到「正確完成問題」的分類方式進行各項人次統計。表 1、表 2 當中，學生代號是一致的，即是同一個代號代表同一位學生。由表 1，資料來自期中考各學生的個人作答內容，期中考採開書考，但是不能上網查詢，期末考亦同。表 1 當中有 9 位學生在未能充分理解下，

抄襲個人筆記作答；而有寫出遞迴式子或者說明有 8 位（類別 D、E），其中 7 位有說明，1 位完整作答。

圖 3(a)代號 1 學生，作答內容清楚地說明了遞迴的關係，但是未能交待 2 的 64 次方怎麼來的，因此，給予部份正確。圖 3(b)代號 23 學生，作答內容寫出了遞迴關係式與推論最少移動的次數關係，因此獲得全對分數。

表 1 學生期中考「河內塔」解題內容摘要

類別	學生代號	人次
A.抄襲	3,4,8,12,13,15,19,20,21	9
B.說明不多	18,22	2
C.只寫答案無說明理由	7,16	2
D.遞迴（有說明）	1,2,6,9,10,14,17	7
E.正確完成問題	23	1

2<sup>64</sup>-1 次 2. 設有 A、B、C 三個塔，A 塔有 N 塊盤，目標是把这些盤全部移到 C 塔。那麼先把 A 頂部的 N-1 塊盤移動到 B 塔，在把 A 塔剩下的大盤移到 C 塔，最後把 B 塔上的 N-1 塊盤移到 C。如此遞迴地使用下去，就可以求解。如 N=64 就最少需移動 2<sup>64</sup>-1 次。

(a)

18446744073709551615=2  
 -N → 1=次  
 =N → 3=次 (需將小片移至 B, 大移 C, 小移 C)  
 同理 =N → 7=次 如前 n 個移完而 T(n) 只需 1 次  
 設移 n 個  
 故 n+1 為 1=次 所以最少移動次數為 T(n+1) = T(n) + 1 + T(n) = 2T(n) + 1  
 故公式得 T(64) = 2<sup>64</sup> - 1 = 18446744073709551615

(b)

圖 3 「河內塔」學生解題舉例

三進位的卡片設計問題(1)是期末考題中才出現的，其餘同「河內塔」都是平時上課歷經的活動內容。如果以二進位到三進位的類推來說，有 6 位學生發現規律（類別 I、J、K、L）。完成問題(1)有 10 位（類別 F、G、H、J、K）。

圖 4(a)所示為代號 21 學生，作答內容觸及需要用到卡片反面，即要「增加卡片」，以及「可行」的解題方向。但是，最後的運算和二進位混淆，產生結果錯誤，獲得部份分數。圖 4(b)代號 10 學生，先以雙向細目表格，說明數字 1~27 如何以三進位方式分類。然後，再加以解釋，當數字擴大到 63 應該用到 12 張卡

片。作答內容針對三進位的卡片問題，說明內容清楚，獲得全對分數。

表 2 學生期末考「卡片問題」解題內容摘要

類別	學生代號	人次
A.抄襲	12	1
B.有不當或其他結論 但是 無過程	1、4、7、19	4
C.完成二進位 但是 無解釋	2	1
D.未完成二進位 且 有解釋	18,20	2
E.未完成問題(1)；推論三進位規律	8	1
F.完成問題(1)	13,15,17,22	4
G.完成問題(1)與部份三進位	16	1
H.完成問題(1)；完成三進位 但是 不當類推	23	1
I.未完成問題(1)；完成二進位、三進位 但是 未有解釋	9	1
J.完成問題(1)；完成部份三進位 且觀察到規律	14,21	2
K.完成問題(1)；完成三進位 且觀察到規律 且正確完成部份	6,3	2
L.未完成問題(1)；完成三進位 且觀察到規律 且正確完成問題(2)	10	1

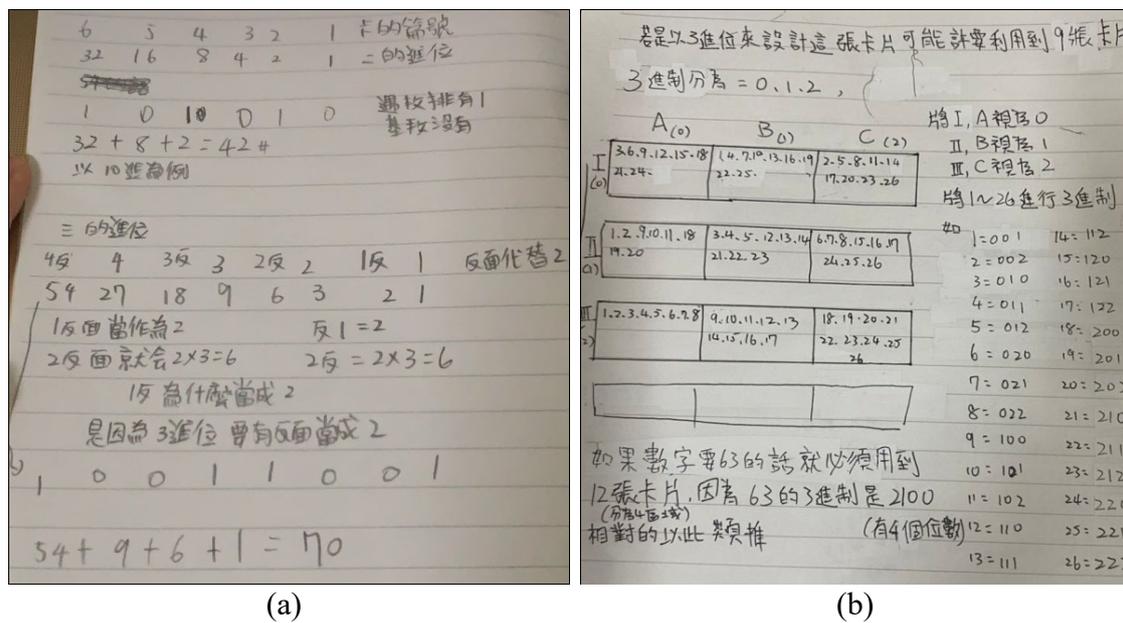


圖 4 「卡片問題」學生解題舉例

由表 1 與表 2，學生的解題內容多樣性隨著上課時間增加而呈現多元，其解題「類別」由 5 類（A~E）增加到 12 類（A~L）；內容的呈現也比較豐富。「抄襲」學生人數明顯減少，由 8 位減少為 1 位，顯示學生對於解題較有自信或者是更勇於表達；或許由於河內塔與二進位卡片問題在網路上有諸多解答與參考資料等說明，也因此造成了學生取巧，直接抄襲而不肯思考。但是，三進位的卡片設

計未曾在網路上出現過，學生必須由二進位的卡片設計來類推之，因此，考驗學生能否真正理解該問題。此外，這也顯示出學生對「標準答案」的追求降低，不會一味追求正確答案，從可以獲得部份分數的學生人數來說，表一有 10 位（類別 C、D、E），表二有 13 位（類別 E~L），略為增加。

## 五、結語

學生在接受探究導向課程的解題表現整體而言是正向的。學生表現了與他人的溝通與討論，並且上台發表問題解決的結果，雖然時間不多，每週只有兩節課，但總是跨出一步。希望學生能夠在與人溝通與合作的過程當中，產生更多主動學習，慢慢養成如何清楚表達自己的想法，擺脫答案的束縛，慢慢體驗數學的用處。

本課程活動有實施分組，分組活動所呈現的紙本資料可以做為小組內個人解題內容分析的參考，以及小組解題活動效果評估。分組活動雖然強調「溝通自己和別人的想法」，但是多數學生不習慣表達，或者需要自信心開口說話、問問題等，需要一段時間的調適，而且同一組組員之間仍在解題表現出現差異，明確指出教師應加強指導學生溝通與對話的能力，雖然個別差異存在是必然的。

## 致謝

感謝教育部高等教育深耕計畫經費補助本課程活動實施。文中所述言論不代表教育部立場。

## 參考文獻

- Catherine A. B., Steven G. & Zahava W. (2017). Constructing an Inquiry Orientation from a Learning Theory Perspective: Democratizing Access through Task Design. *PRIMUS*, 27(1), 75-95, DOI: 10.1080/10511970.2016.1194339
- Daniel G. C. (2010). Peirce's Philosophy of Mathematical Education: Fostering Reasoning Abilities for Mathematical Inquiry. *Study of Philosophy Education*, 29, 421-439. DOI 10.1007/s11217-010-9188-5
- George K., Estrella J., Karen K. & Christine A-L (2018). Inquiry-Oriented Instruction: A Conceptualization of the Instructional Principles. *PRIMUS*, 28(1), 13-30, DOI: 10.1080/10511970.2017.1338807
- Martha B. (2017). Using Games to Engage Students in Inquiry. *PRIMUS*, 27(2), 271-280, DOI: 10.1080/10511970.2016.1192074